УЧЕБНИКИ ВШЭ

УЧЕБНИКИ ВШЭ

В.А. ПАНОВ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

ОТ ОБОБЩЕНИЙ СХЕМЫ БЕРНУЛЛИ ДО МОДЕЛИ БЛЭКА–ШОУЛЗА

УЧЕБНИК

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ
ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ ЭКОНОМИКИ

МОСКВА, 2026

УДК 514.7
ББК 22.151
П16

https://elibrary.ru/grphhj

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, ординарный профессор
Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», научный руководитель Международной лаборатории стохастического анализа и его приложений
В.Д. Конаков;
доктор математических наук, профессор Института математики и информатики Болгарской академии наук
Й. Стоянов

П16 **Панов, В. А.** Основы теории случайных процессов: от обобщений схемы Бернулли до модели Блэка–Шоулза [Текст] : учебник / В. А. Панов; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». — М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2026. — (Учебники Высшей школы экономики). — 286, [2] с. — 500 экз. — ISBN 978-5-7598-4326-9 (в пер.). — ISBN 978-5-7598-4479-2 (e-book).

Учебник написан на основе материалов, собранных автором при прочтении курса «Случайные процессы» на факультете экономических наук НИУ ВШЭ и при создании онлайн-версии данного курса (с 2018 до 2022 года курс был доступен на платформе Coursera, с 2022 года — на online.hse.ru). В учебнике подробно рассказано о наиболее важных типах случайных процессов — о гауссовских и марковских процессах, броуновском движении, процессах восстановления, процессах Пуассона, процессах Леви. Особое внимание уделено стохастическому анализу, который (по аналогии с математическим анализом) можно поделить на два основных раздела — изучение характеристик случайных процессов, таких как непрерывность, стационарность, эргодичность, и построение теории стохастического интегрирования. Каждый раздел содержит задачи для самостоятельного решения.

Издание предназначено для студентов и аспирантов математических, технических и экономических специальностей, которые уже знакомы с понятиями теории вероятностей и хотят познакомиться с основами теории случайных процессов.

УДК 514.7
ББК 22.151

Опубликовано Издательским домом Высшей школы экономики
http://id.hse.ru

doi:10.17323/978-5-7598-4326-9

ISBN 978-5-7598-4326-9 (в пер.)
ISBN 978-5-7598-4479-2 (e-book)

Оглавление

Основные обозначения и сокращения

м.о.	математическое ожидание
н.о.р.	независимые одинаково распределённые
сл.в.	случайная величина
ф.р.	функция распределения
х.ф.	характеристическая функция
ЗБЧ	закон больших чисел
УЗБЧ	усиленный закон больших чисел
ЦПТ	центральная предельная теорема
СДУ	стохастическое дифференциальное уравнение
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$	вероятностное пространство: Ω — множество элементарных событий, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра, P — вероятностная мера
$\mathcal{F}_\xi$	σ-алгебра, порождённая сл.в. ξ
$\sharp\Omega$	число элементов множества Ω
$\Gamma(\cdot)$, $\mathrm{B}(\cdot,\cdot)$	гамма-функция Эйлера и бета-функция Эйлера
$\mathrm{Gamma}(r,\theta)$	гамма-распределение с параметрами $r, \theta > 0$.
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	нормальное распределение со средним μ и дисперсией σ^2
$\mathrm{Pois}(\lambda)$	распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$
$\mathrm{Unif}(A)$	равномерное распределение на множестве $A \subset \mathbb{R}$
$\varphi(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$	плотность и функция распределения сл.в. $\zeta \sim \mathcal{N}(0,1)$
$\mathcal{B}(A)$	Борелевская σ-алгебра на подмножестве A числовой прямой
$\mathsf{E}[\xi]$	математическое ожидание сл.в. ξ
$\mathsf{Var}(\xi)$	дисперсия сл.в. ξ
$\mathsf{Cov}(\xi,\eta)$	ковариация между сл.в. ξ, η
$\mathsf{Corr}(\xi,\eta)$	коэффициент корреляции (Пирсона) между сл.в. ξ и η

$m_\xi(\cdot)$	производящая функция целочисленной неотрицательной сл.в. ξ
$\phi_\xi(\cdot)$	характеристическая функция сл.в. ξ
$\psi(\cdot)$	характеристическая экспонента процесса Леви
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	множества натуральных, целых, рациональных, действительных неотрицательных, действительных, комплексных чисел
$\mathrm{WN}(\mu, \sigma^2)$	процесс белого шума с параметрами $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$
1_A	индикаторная функция множества A
п.н.	почти наверное
$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$	скалярное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^d$
$\mathrm{Matr}(n \times m)$	матрица размера $n \times m$

Предисловие

Случайный процесс, коротко говоря, — это коллекция случайных величин, индексированная (пронумерованная) временем. Это нестрогое определение содержит прилагательное *случайный*, которое достаточно часто используется в бытовом смысле. Примеров случайных событий достаточно много — мы говорим, что монета *случайно* падает орлом или решкой, количество очков на игральной кости является *случайным* числом от 1 до 6, да и сумма выигрыша в лотерее *случайна*. На самом деле, случайность в этих примерах отнюдь не так очевидна, как кажется. Например, на процесс подбрасывания монеты можно посмотреть с физической точки зрения: подбрасывая монету, мы сообщаем ей ускорение в определённом направлении, и затем под действием силы тяжести и силы сопротивления воздуха монета падает либо орлом, либо решкой. При таком взгляде на этот процесс, результат подбрасывания монеты обусловлен исключительно законами физики, и возникает сомнение в его случайности.

Не составляет труда найти и другие примеры — события, которые нам кажутся случайными, на самом деле происходят в соответствии с законами физики, химии, биологии, экономики, социологии и других наук. Однако есть одна важная особенность, объединяющая многие ситуации: *на объект исследования действует много факторов, и точное совместное влияние этих факторов на объект невозможно (или очень сложно) описать*. Например, все известные попытки построения физических моделей для процесса подбрасывания монеты основаны на существенных упрощениях[1], и полное описание траектории движения монеты вряд ли доступно даже с использованием современных компьютеров. Поэтому мы анализируем не сами траектории, а результат проведения эксперимента — выпадение орла или решки.

Такая же ситуация и в экономических приложениях. Например, цена акции обусловлена поведением игроков на бирже, но точные сценарии торговли не поддаются детерминированному описанию. Именно поэтому мы можем анализировать только результат торгов — траектории изменения цен. Подобрав математическую (вероятностную) модель для её описания, мы можем решить множество прикладных задач — строить прогноз на

[1] Пример математической модели подбрасывания монеты приведён в работе *Diaconis P., Holmes S., Montgomery R.* (2007). Dynamical bias in the coin toss // SIAM Review. Vol. 49 (2). P. 211–235.

будущее, тестировать алгоритмы торговли, предсказывать кризисные явления и т.д.

Итак, концепция случайности опирается на невозможность точно предсказать результат того или иного события. Для описания, анализа, прогнозирования таких событий был разработан аппарат обширной области математических знаний, называемой *стохастикой*. Словарь иностранных слов под редакцией Чудинова (издание 1910 года) содержит такое лаконичное определение: «Стохастика — это учение о вероятностях (*греч.*, от stochazomai — предполагать)». Первые применения этого термина можно встретить в работах Якоба Бернулли, который в своём известном труде 1713 года[2] использовал латинское выражение «Ars Conjectandi sive Stochastice» («искусство строить предположения, или стохастика»). В современной математике этот термин, а точнее немецкое прилагательное *stochastisch*, появилось в работе Владислава Борткевича в 1917 году в значении *случайный*, и затем в словосочетании *стохастический процесс* был использован в работах многих классиков: Андрея Николаевича Колмогорова, Александра Яковлевича Хинчина, Джозефа Дуба.

Основными разделами стохастики, входящими в учебные планы большинства технических и экономических специальностей, являются теория вероятностей, математическая статистика и теория случайных процессов. Первый раздел посвящён изучению теоретических свойств случайных величин, а второй — нахождению характеристик распределений случайных величин по имеющимся наблюдениям. Оба раздела опираются на предположение о независимости случайных величин, которое на практике выполнено очень редко: возвращаясь к примеру о цене акции, становится понятно, что предложение о независимости цены «сегодня» от цены «вчера» не может соответствовать действительности. Теория случайных процессов посвящена анализу ситуаций, когда случайная величина меняется во времени и в разные моменты времени «версии» случайной величины зависимы между собой.

Выбор метода для описания вида зависимости является ключевым вопросом для задания случайного процесса. Разные подходы приводят к построению процессов с разными свойствами. В данной книге мы подробно обсудим идеи, лежащие в основе определений таких классов случайных процессов, как процессы восстановления, пуассоновские, марковские, гауссовские процессы, а также процессы Леви.

Учебник ориентирован на широкую аудиторию студентов и аспирантов математических, технических, экономических специальностей, которые

[2] *Bernoulli J.* (1713). Ars conjectandi, Opus posthumum. Accedit tractatus de seriebus infinitis, et epistola Gallice scripta de ludo pilae reticularis. Basel: Thurnisii fratres.

уже знакомы с понятиями теории вероятностей и хотят познакомиться с основами теории случайных процессов. Модели и методы, представленные в данном учебнике, находят применение в большом спектре прикладных задач при попытке описать объекты, на поведение которых оказывают влияние факторы, не поддающиеся точному прогнозированию при помощи детерминированных функций от времени. Например, экономические системы зачастую не удаётся описать детерминированным образом из-за влияния внешних факторов, таких как санкции против определённых стран, пандемия коронавируса, колебания цен на нефть, и изменения ключевых экономических показателей носят скачкообразный характер.

Прежде чем мы погрузимся в увлекательный мир стохастики, я хотел бы выразить искреннюю признательность Йордану Стоянову. Он внимательно прочитал текст и дал ряд ценных рекомендаций, в том числе об использовании современной системы математических обозначений.

ГЛАВА 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Достаточно часто в рамках данной книги мы будем напоминать читателю некоторые элементы теории вероятностей и математической статистики, однако в целом предполагается, что читатель знаком по крайней мере с основами этих разделов. Одному из таких напоминаний посвящён следующий раздел.

1.1. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Центральным объектом аксиоматики Колмогорова является вероятностное пространство, которое состоит из трёх элементов $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, где Ω — *множество элементарных событий* (*sample space*), $\mathcal{F}$ — *σ-алгебра* (*σ-algebra*) и P — *вероятностная мера* (*probability measure*). Ниже мы дадим точное определение этих объектов, а также подробно рассмотрим построение вероятностных пространств для следующих двух классических моделей.

(i) Схема Бернулли: эксперимент состоит в подбрасывании монеты, результатом является 1 или 0 (орёл/решка, часто ассоциируется с успехом/неудачей). При этом вероятность успеха равна p, а вероятность неудачи — $(1-p)$, где $p \in (0,1)$. Обычно данный эксперимент повторяется независимо несколько раз. Количество повторений мы будем обозначать через n.

(ii) Бросание точки на $[0,1]$: на отрезке $[0,1]$ случайным образом выбирается одна точка. Результат проведения эксперимента — любое действительное число от 0 до 1.

Ω — *множество элементарных событий* — множество всевозможных исходов эксперимента. В качестве Ω может выступать любое непустое множество. Например, в случае одного эксперимента в схеме Бернулли Ω состоит из двух элементов (1 и 0), а в схеме Бернулли длины n — Ω состоит из 2^n всевозможных векторов $(a_1, \ldots, a_n)$, в которых каждый элемент a_i равен 0 или 1. Во втором примере (бросание точки на [0,1]), Ω равно отрезку $[0,1]$.

$\mathcal{F}$ — *σ-алгебра* — совокупность подмножеств Ω, удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $\Omega, \varnothing \in \mathcal{F}$;
2) если $A \in \mathcal{F}$, то $\overline{A} := \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$ — вместе с любым событием σ-алгебра содержит противоположное событие;
3) если $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, то $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ — вместе с любым счётным набором событий σ-алгебра содержит их объединение.

Элементы σ-алгебры $\mathcal{F}$ называются *случайными событиями* (*random events*). Событие Ω называется *достоверным событием*, а $\varnothing$ — *невозможным*. Из определения σ-алгебры нетрудно доказать, что

1) если $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in \mathcal{F}$;
2) если $A, B \in \mathcal{F}$, то $B \setminus A = B \cap \overline{A} \in \mathcal{F}$.

Неформальный смысл этого термина состоит в том, что $\mathcal{F}$ содержит подмножества Ω, необходимые для ответа на любой вопрос о результате эксперимента. Например, в схеме Бернулли можно задать вопрос о том, верно ли, что среди n подбрасываний ровно k раз выпадал орёл, или верно ли, что выпадения орла и решки чередовались. Нетрудно понять, что для ответов на все возможные вопросы необходимо включить в $\mathcal{F}$ все возможные подмножества Ω. Такая σ-алгебра, состоящая из всех возможных подмножеств дискретного множества, называется *булеаном* (*power set*) и состоит из $2^{\sharp\Omega}$ элементов. Например, в схеме Бернулли, состоящей из n испытаний, множество $\mathcal{F}$ состоит из 2^{2^n} элементов.

В модели (ii) логично задать вопрос, верно ли, что точка попала на некоторый фиксированный отрезок $[\alpha, \beta]$, где $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$. Поэтому все такие отрезки должны войти в σ-алгебру $\mathcal{F}$. Но тогда и все открытые интервалы (α, β), где $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, также войдут в $\mathcal{F}$: действительно, множества вида $[0, \alpha] \cup [\beta, 1]$ входят в $\mathcal{F}$ по п. 3 определения σ-алгебры, и, значит, $(\alpha, \beta) = [0, 1] \setminus ([0, \alpha] \cup [\beta, 1]) \in \mathcal{F}$ по п. 2. Аналогично можно показать, что все полуоткрытые интервалы $[\alpha, \beta)$ и $(\alpha, \beta]$, а также одноточечные множества $\{\alpha\}$ лежат в $\mathcal{F}$. Кроме того, все счётные объединения таких множеств также лежат в $\mathcal{F}$. Таким образом, мы приходим к понятию борелевской σ-алгебры на $[0, 1]$.

Определение 1.1. *Борелевская σ-алгебра на* $[0, 1]$ (*Borel σ-algebra*, обозначение: $\mathcal{B}([0, 1])$) — наименьшая σ-алгебра, содержащая все отрезки вида $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$[3].

P — *вероятностная мера на* $(\Omega, \mathcal{F})$ — функция, действующая из $\mathcal{F}$ в $[0, 1]$, такая, что

[3] Аналогично вводится понятие борелевской σ-алгебры на всей числовой прямой.

1) $\mathsf{P}\{\Omega\} = 1$, $\mathsf{P}\{\varnothing\} = 0$ — вероятность достоверного события равна 1, а вероятность невозможного события — 0;
2) $\forall\, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}:\ A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j:\quad \mathsf{P}\left\{\sqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}\{A_i\}$ — имеет место свойство счётной аддитивности (countable additivity).

В дискретной модели с $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ каждому элементу вероятностного пространства $\omega_i, i = 1, 2, \ldots$ ставится в соответствие число $p_i \in [0, 1]$, причём $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Вероятность любого множества $A \in \mathcal{F}$ рассчитывается по формуле $\mathsf{P}\{A\} = \sum_{i:\, \omega_i \in A} p_i$. Например, в схеме Бернулли длины n вероятность набора $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i, i = 1, \ldots, n$ — это 0 или 1, равна

$$p_{(a_1, \ldots, a_n)} = p^{\sum_{i=1}^{n} a_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^{n} a_i},$$

и поэтому вероятность события $A_k = \{\sum_{i=1}^{n} a_i = k\}$ (ровно k успехов в схеме из n испытаний) равна

$$\mathsf{P}\{A_k\} = \sum_{(a_1, \ldots, a_n):\sum_{i=1}^{n} a_i = k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Во втором примере логично определить вероятностную меру интервала $[\alpha, \beta]$ как $\mathsf{P}\{[\alpha, \beta]\} = \beta - \alpha$, и затем продлить эту меру на все борелевские подмножества отрезка $[0, 1]$ в соответствие с п. 2 определения вероятностной меры. В этом случае вероятностная мера совпадает с мерой Лебега.

Отметим, что выбор вероятностного пространства в одной и той же задаче может быть разным. В некоторых случаях «хитрый» выбор вероятностного пространства существенно упрощает вычисления.

Пример 1.1. Подсчёт вероятности вытягивания «счастливого» билета на экзамене ([46, с. 12–13]). Перед началом экзамена преподаватель выложил на стол N билетов, причём известно, что ровно n из них «счастливые» (в том смысле, что все студенты считают эти билеты простыми). Студенты заходят по одному и независимо друг от друга вытягивают по одному билету, не возвращая билет на стол. Спрашивается, у какого студента больше шансов вытянуть «счастливый» билет — у того, кто зайдёт в кабинет первым, или у того, кто войдёт последним?

Элегантное решение этой задачи состоит в описании эксперимента через пространство Ω, состоящего из перестановок N чисел,

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & N \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_N \end{pmatrix}, \qquad \text{где} \quad \{i_1, \ldots, i_N\} = \{1, \ldots, N\} \right\}.$$

Можно представить себе, что экзаменатор составляет такую перестановку, записывая под номером студента (1, 2, …, N) номер его билета (i_1, i_2, …, i_N). Понятно, что все такие перестановки равновероятны и их количество равно $N! = 1 \cdot \ldots \cdot N$. Тогда количество элементов из пространства Ω, соответствующих событию

$$A_j = \{j\text{-й студент вытащил «счастливый» билет}\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, N,$$

равно $n(N-1)!$, поскольку i_j равно одному из номеров n «счастливых» билетов, а остальные номера билетов $i_k, k \neq j$, могут быть любыми, отличными от i_j. Мы приходим к выводу, что

$$\mathsf{P}\{A_j\} = \frac{n(N-1)!}{N!} = \frac{n}{N}, \qquad j = 1, 2, \ldots, N,$$

и поэтому вероятность вытянуть «счастливый» билет одинакова для всех студентов.

Для полноты картины напомним определение случайной величины.

Определение 1.2. *Случайная величина* (*random variable*) ξ — это функция, действующая из Ω в $\mathbb{R}$, измеримая относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$, т.е.

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}): \qquad \xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

Нетрудно показать, что для любой случайной величины ξ множество подмножеств

$$\{\xi^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

является σ-алгеброй. Эта σ-алгебра называется *σ-алгеброй, порождённой случайной величиной* ξ, и в дальнейшем будет обозначаться через $\mathcal{F}_\xi$.

Замечание 1.1. Важно понимать, почему именно такое определение случайной величины и вероятностного пространства приводит к построению строгой теории. Как известно, одной из основных характеристик случайной величины является *функция распределения* (*distribution function*), определяемая как

$$F(x) = \mathsf{P}\{\xi \leqslant x\}, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

и вполне естественно задать вопрос, почему объект, написанный в правой части этого равенства, определён корректно. Поскольку, согласно определению случайной величины, ξ — это функция из Ω в $\mathbb{R}$, запись $\{\xi \leqslant x\}$ нужно понимать как множество всех элементов $\omega \in \Omega$ таких, что образ ω при отображении ξ меньше числа x:

$$\{\xi \leqslant x\} = \{w : \xi(w) \leqslant x\} = \{w : \xi(w) \in (-\infty, x]\} = \{w \in \xi^{(-1)}((-\infty, x])\}.$$

Множество $(-\infty, x]$ лежит в борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, поэтому $\xi^{(-1)}((-\infty, x])$ лежит в σ-алгебре $\mathcal{F}$ (см. определение 1.2). Значит, в правой части равенства (1.1) рассмотрена вероятностная мера от некоторого события из $\mathcal{F}$. Поскольку вероятностная мера определена на множествах из $\mathcal{F}$, мы получаем что объект в правой части (1.1) корректно определён.

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА И ПРОСТЫЕ ПРИМЕРЫ

В самом начале этого учебника было сказано, что случайный процесс — это коллекция случайных величин, индексированная (пронумерованная) временем. Это неформальное определение очень помогает для понимания строгого математического определения, которое дано ниже.

Определение 1.3. Пусть T — фиксированное подмножество $\mathbb{R}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство. Тогда отображение

$$X : T \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$$

называется *случайным процессом* (*stochastic process* или *random process*), если для любого $t \in T$ функция

$$X(t, \omega) =: X_t(\omega) = X_t, \qquad \omega \in \Omega,$$

является случайной величиной на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Таким образом, для любого $t \in T$ случайный процесс является случайной величиной. При этом важно, что случайные величины, получаемые при фиксировании разных элементов множества T, определены на одном и том же вероятностном пространстве.

Множество T используется для индексирования и играет роль времени (T от слова «time»), хотя в общем случае может быть любым подмножеством числовой прямой. Если T состоит из целых значений (как правило, неотрицательных), то говорят о процессах с дискретным временем. Если T является континуальным подмножеством числовой прямой (как правило, $[0, \infty)$ или отрезок $[\alpha, \beta]$), то процесс имеет непрерывное время.

Пример 1.2. Любая последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин $\eta_1, \eta_2, \ldots$ образует процесс с дискретным временем $\eta_n : \{1, 2, \ldots\} \times \Omega \to \mathbb{R}$. В этом примере время — это номер испытания (или, другими словами, испытания происходят в моменты времени $n = 1, 2, \ldots$). Если $\eta_1, \eta_2, \ldots$ получены в соответствии со схемой Бернулли (см. раздел 1.1), то процесс η_n называется *процессом Бернулли*.

Пример 1.3. Другой простой пример возникает, если процесс тождественно равен одной и той же сл.в. в каждый момент времени: $X_t = \xi$, $t \in T$, где ξ — некоторая сл.в., а T может быть любым подмножеством $\mathbb{R}$.

В некотором смысле приведённые выше примеры отражают случаи максимальной независимости и максимальной зависимости между случайными величинами, получающимися из случайного процесса в разные моменты времени. Естественно, большинство примеров отражают некоторую «промежуточную» степень зависимости.

Для понимания устройства случайных процессов очень полезны два важных понятия, которые мы определим в следующем разделе.

1.3. ТРАЕКТОРИИ И КОНЕЧНОМЕРНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Итак, случайный процесс — это функция от двух переменных, одна из которых ($t \in T$) ассоциируется со временем, а вторая ($\omega \in \Omega$) является элементом множества элементарных событий. Введём следующие определения.

Определение 1.4. *Траекторией случайного процесса* X_t (*trajectory, path*) называется отображение $t \mapsto X_t(\omega)$ при фиксированном $\omega \in \Omega$. *Конечномерным* (*n-мерным*) *распределением* (*finite–dimensional distribution*) случайного процесса X_t называется распределение вектора $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ для фиксированного набора моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$.

Пример 1.4. Пусть случайный процесс X_t определён как $X_t = \xi \cdot t$, $t \geqslant 0$, где ξ — сл.в., принимающая значения 1 и 2 с вероятностями $1/2$. Тогда траекториями процесса являются две прямые: t и $2t$, а конечномерные распределения удобно задать через многомерную функцию распределения:

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\{X_{t_1} \leqslant x_1, \ldots, X_{t_n} \leqslant x_n\} &= \mathsf{P}\Big\{\xi t_1 \leqslant x_1, \ldots, \xi t_n \leqslant x_n\Big\} = \\ &= F_\xi\Big(\min\Big\{\frac{x_1}{t_1}, \ldots, \frac{x_n}{t_n}\Big\}\Big),\end{aligned}$$

где $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, F_ξ — функция распределения сл.в. ξ, равная

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1/2, & x \in [1, 2), \\ 1, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

Пример 1.5. Важно понимать, что процессы X_t и Y_t, имеющие одинаковые распределения в каждый момент времени ($X_t \stackrel{d}{=} Y_t$, $\forall t \in T$), могут иметь разные траектории. Простой пример: пусть в дискретные моменты времени, $t = 1, 2, \ldots$, процессы X_t и Y_t построены в соответствии с примерами 1.2 и 1.3 соответственно, причём величины $\eta_1, \eta_2, \ldots$ и ξ имеют стандартное нормальное распределение. Тогда процессы X_t и Y_t имеют одинаковые распределения в любой момент времени t, но траектории этих процессов различны (см. рис. 1.2).

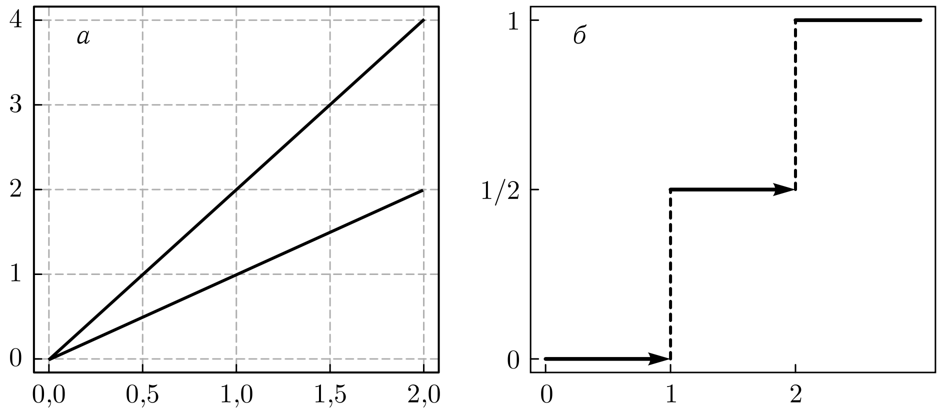

Рис. 1.1. *а* — графики траекторий процесса X_t из примера 1.4; *б* — функция распределения F_ξ сл.в. ξ

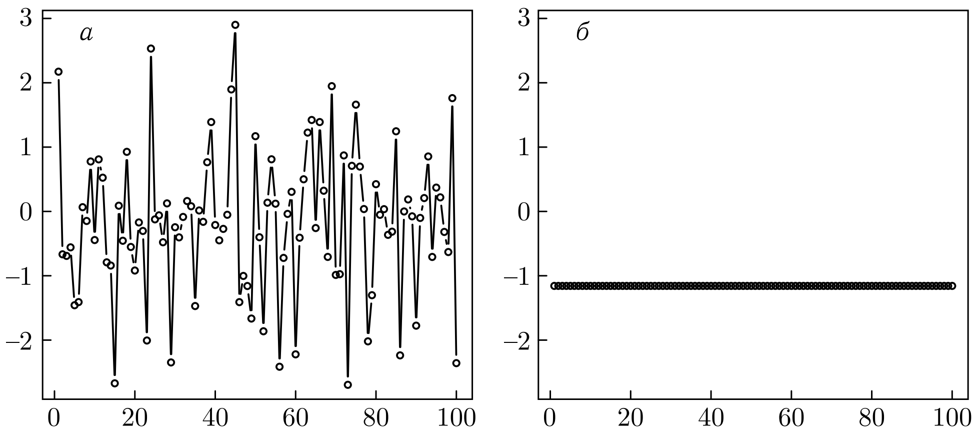

Рис. 1.2. Типичные траектории процессов X_t (*а*) и Y_t (*б*), определённых в примере 1.5. Для наглядности последовательные значения соединены прямыми линиями

Как показывает последний пример, вопрос равенства процессов является достаточно тонким. С этим вопросом связаны следующие три понятия.

Определение 1.5. Говорят, что два процесса X_t и Y_t, $t \in T$,

- *совпадают по распределению* (обозначение: $(X_t)_{t\in T} \overset{d}{=} (Y_t)_{t\in T}$), если все их конечномерные распределения совпадают, т.е.

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \overset{d}{=} (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}) \tag{1.2}$$

для любых моментов времени $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ [4];

[4] В этом определении можно считать, что $t_1 < \ldots < t_n$.

- *стохастически эквивалентны* (в этом случае X_t называется *модификацией* Y_t и наоборот), если
$$\mathsf{P}\{X_t = Y_t\} = 1, \qquad \forall t \in T; \tag{1.3}$$
- *неразличимы*, если почти все[5] траектории совпадают
$$\mathsf{P}\{X_t = Y_t,\ \forall t \in T\} = 1. \tag{1.4}$$

Связь между этими понятиями следующая:

неразличимы $\Longrightarrow$ стохастически эквивалентны $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ совпадают по распределению.

Первая импликация очевидна из определения. Для доказательства второй импликации зафиксируем моменты времени $t_1 < \ldots < t_n$:

$$\mathsf{P}\Big\{\cap_{k=1\ldots n}\{\omega \in \Omega:\ X_{t_k}(\omega) = Y_{t_k}(\omega)\}\Big\} =$$
$$= 1 - \mathsf{P}\Big\{\cup_{k=1\ldots n}\{\omega \in \Omega:\ X_{t_k}(\omega) \neq Y_{t_k}(\omega)\}\Big\} \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}\Big\{\omega \in \Omega:\ X_{t_k}(\omega) \neq Y_{t_k}(\omega)\Big\} = 1.$$

Таким образом, мы получили, что из стохастической эквивалентности следует равенство случайных векторов $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ и $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n})$ почти наверное, и поэтому верно (1.2).

Теперь приведём два простых примера, показывающие, что импликации нельзя обратить.

Пример 1.6. Рассмотрим процесс $X_t \equiv 0$, $t \in [0,1]$, и процесс $Y_t = \mathbb{1}_{\{t=\tau\}}$, $t \in [0,1]$, где τ — непрерывная сл.в. на $[0,1]$ (например, τ имеет равномерное распределение на $[0,1]$). Процессы X_t и Y_t стохастически эквивалентны (и значит, совпадают по распределению), поскольку для любого $t \in [0,1]$
$$\mathsf{P}\big\{X_t = Y_t\big\} = \mathsf{P}\big\{\tau \neq t\big\} = 1 - \mathsf{P}\big\{\tau = t\big\} = 1,$$
так как непрерывная сл.в. принимает любое фиксированное значение с нулевой вероятностью. Однако эти процессы не являются неразличимыми, поскольку их траектории различны — все траектории ξ_t являются

[5] Мы знаем, что траектория зависит от элемента вероятностного пространства $\omega \in \Omega$, и поэтому словосочетание *почти все траектории* означает, что подмножество Ω, для которого траектории $X_t(\omega)$ и $Y_t(\omega)$ совпадают (как функции от времени), имеет вероятностную меру, равную 1. В дальнейшем мы будем часто употреблять слова *почти все*, *почти всюду*, *почти наверное* — все эти словосочетания являются математическими терминами и означают, что некоторое событие имеет вероятность 1.

непрерывными (тождественно равными 0), а все траектории η_t разрывны[6]. Поэтому первую импликацию нельзя обратить в общем случае.

Однако отметим, что в некоторых случаях обращение возможно — например, известно, что два процесса $(X_t)_{t\in T}$ и $(Y_t)_{t\in T}$, являющиеся модификациями друг друга, неразличимы, если множество T является счётным (см. [18, лемма 21.5]). В случае, если множество T представляет собой интервал (возможно бесконечный) это свойство выполнено, если дополнительно предположить, что траектории процессов X и Y п.н. непрерывны справа.

Пример 1.7. Продолжая пример 1.3, рассмотрим $X_t = \tau$, для любого $t \geqslant 0$, где τ имеет равномерное распределение на $[0, 1]$, и $Y_t = 1 - \tau$. Тогда

$$\mathsf{P}\big\{X_{t_1} \leqslant x_1, \ldots, X_{t_n} \leqslant x_n\big\} = \mathsf{P}\big\{\tau < \min\big(x_1, \ldots, x_n\big)\big\} = \min\big(x_1, \ldots, x_n\big),$$

и аналогично

$$\mathsf{P}\big\{Y_{t_1} \leqslant x_1, \ldots, Y_{t_n} \leqslant x_n\big\} = \mathsf{P}\big\{1-\tau < \min\big(x_1, \ldots, x_n\big)\big\} = \min\big(x_1, \ldots, x_n\big),$$

поскольку $(1-\tau)$ и τ имеют одинаковое распределение, равномерное на $[0, 1]$. Следовательно, эти процессы совпадают по распределению, но, как легко видеть, не являются стохастически эквивалентными. Значит, вторую импликацию также нельзя обратить.

1.4. ЗАДАЧИ

1.1. Случайный процесс X_t определён для $t \in [0, 1]$ следующим образом:

$$X_t = \begin{cases} 1, & \text{если } t \leqslant \xi; \\ 0, & \text{если } t > \xi, \end{cases}$$

где $\xi \sim \mathrm{Unif}([0, 1])$. Опишите траектории процесса и найдите двумерные распределения процесса X_t.

---

[6] Тот факт, что X_t и Y_t не являются неразличимыми, можно доказать и формально:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\big\{X_t = Y_t,\ \forall t \in T\big\} &= \mathsf{P}\big\{\cap_{t\geqslant 0}\{\omega \in \Omega:\ X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}\big\} = \\ &= \mathsf{P}\big\{\cap_{t\geqslant 0}\{\omega \in \Omega:\ \tau(\omega) \neq t\}\big\} = \\ &= 1 - \mathsf{P}\big\{\cup_{t\geqslant 0}\{\omega \in \Omega:\ \tau(\omega) = t\}\big\} = 1 - \mathsf{P}\{\Omega\} = 0. \end{aligned}$$

Распространённая ошибка при проведении таких вычислений — это неверное использование свойства аддитивности вероятностной меры:

$$1 - \mathsf{P}\big\{\cup_{t\geqslant 0}\{\omega \in \Omega:\ \tau(\omega) = t\}\big\} \stackrel{?}{=} 1 - \sum_{t\geqslant 0} \mathsf{P}\big\{\{\omega \in \Omega:\ \tau(\omega) = t\}\big\} = 1,$$

где первое равенство неверно, поскольку вероятностная мера обладает свойством счётной (а не континуальной) аддитивности.

1.2. Опишите траектории и найдите конечномерные распределения процесса X_t, определённого для $t \in (0, \infty)$ следующим образом:
(i) $X_t = \mathrm{e}^{-|\xi|/t}$, где сл.в. ξ имеет стандартное нормальное распределение;
(ii) $X_t = |\xi + \eta|/t$, где ξ и η — независимые сл.в., имеющие нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $1/2$.

Верно ли, что почти все траектории этих процессов являются строго монотонными на $(0, \infty)$?

1.3. Случайный процесс задаётся как $X_t = \xi + Ct$, $t \in [0, 1]$, где ξ — сл.в. с непрерывной ф.р. F_ξ и C — фиксированная константа. Докажите, что

$$\mathsf{P}\Big\{X_t = 0 \quad \text{хотя бы при одном}\, t \in [0, 1]\Big\} = |F_\xi(0) - F_\xi(-C)|.$$

1.4. Определим процесс

$$X_t = \xi + t\,(\eta + t)\,, \qquad t \geqslant 0,$$

где ξ и η — две (возможно, зависимые) сл.в. Приведите примеры таких невырожденных распределений сл.в. η, что вероятность события «траектория процесса X_t возрастает на $[0, \infty)$» равна

(i) 1 (ii) $1/2$ (iii) $1/4$

при любом распределении сл.в. ξ.

1.5. Случайный процесс определяется следующим образом:

$$X_t = \alpha t^2 + \beta, \qquad t \geqslant 0,$$

где α, β — независимые сл.в., равномерно распределённые на отрезке $[-1, 1]$.
(i) Опишите траектории процесса X_t.
(ii) Найдите вероятность события «$X_t > 0$ при всех $t > 1$».

1.6. Пусть ξ_1, ξ_2 — 2 независимые сл.в., равномерно распределённые на отрезке $[-1, 1]$. Определим случайный процесс

$$X_t = t\,(\xi_1 + a(\xi_2 + 2a))\,, \qquad t \geqslant 0,$$

где $a \in \mathbb{R}$ — детерминированный параметр (т.е. параметр, не являющийся случайной величиной). Найдите значения параметра a, при которых почти все траектории процесса X_t возрастают.

1.7. Рассмотрим три процесса

$$X_t = \xi t, \qquad Y_t = \eta\xi t, \qquad Z_t = \zeta\xi t, \qquad t \geqslant 0,$$

где $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$, сл.в. η принимает значения 0 и 1 с вероятностями $1/2$, а сл.в. ζ принимает значения –1 и 1 с вероятностями $1/2$.

Сл.в. ξ и η, ξ и ζ независимы. Определите для пар процессов X_t и Y_t, X_t и Z_t:

(a) совпадают ли они по распределению;
(b) являются ли они стохастически эквивалентными;
(c) являются ли они неразличимыми.

1.8. Опишите траектории и найдите n-мерные распределения следующих процессов

$$X_t = \log(a\xi t), \qquad Y_t = at\log(\xi), \qquad Z_t = \xi\log(at),$$

где ξ — положительная сл.в. с функцией распределения F_ξ, непрерывной и строго возрастающей на $\mathbb{R}_+$, $a > 0$ — константа и $t > 0$ — время. Совпадают ли множества траекторий для некоторых из перечисленных процессов? Совпадают ли конечномерные распределения некоторых из перечисленных процессов?

1.9. В нулевой момент времени в точке начала координат на числовой прямой находятся две улитки: одна начинает движение вправо по числовой прямой со скоростью 1 см/мин, а вторая остаётся на месте. Через τ минут вторая начинает догонять первую, двигаясь вправо со скоростью 2 см/мин. Известно, что $\tau \sim \mathrm{Unif}([0,1])$.
Обозначим через X_t (абсолютное) расстояние между улитками через t минут, $t \in [0,1]$.

(i) Опишите траектории процесса X_t.
(ii) Найдите одномерные распределения процесса X_t.

1.10. Два велосипедиста собираются выехать навстречу друг другу из городов A и B, расстояние между которыми 90 км. Перед началом движения они созвонились и решили, что первый велосипедист начнёт движение из A в B с постоянной скоростью 15 км/ч, а второй (закончив свои дела в B) через τ часов будет двигаться навстречу с большей скоростью, 20 км/ч. Известно, что $\tau \sim \mathrm{Unif}([0,6])$. Обозначим через X_t расстояние, которое нужно проехать второму велосипедисту до точки встречи с первым велосипедистом через t минут после начала движения.

(i) Опишите траектории процесса X_t.
(ii) Найдите двумерные распределения процесса X_t.

1.11. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределённые сл.в. с функцией распределения F. Определим случайный процесс

$$M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Докажите, что k-мерное распределение этого процесса имеет функцию распределения

$$\mathsf{P}\big\{M_{n_1} \leqslant x_1, \ldots, M_{n_k} \leqslant x_k\big\} = \\ = F^{n_1}\left(\bigwedge_{i=1}^{k} x_i\right) F^{n_2-n_1}\left(\bigwedge_{i=2}^{k} x_i\right) \ldots F^{n_k-n_{k-1}}\left(x_k\right),$$

где $\bigwedge_{i=1}^{k} x_i = \min\big\{x_1, \ldots, x_k\big\}$ и $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$.

1.12. Определим процесс

$$X_t = (\xi + 1)t\mathrm{e}^{-\xi t}, \qquad t \geqslant 0,$$

где ξ имеет экспоненциальное распределение. Найти самое большое число $a \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\mathsf{P}\Big\{\exists\, t_1, t_2 \geqslant 0,\ t_1 \neq t_2\ :\quad X_{t_1} = X_{t_2} = a\Big\} = 1.$$

1.13*. Компания отправляет индивидуальные предложения n клиентам по электронной почте. На сервере произошёл сбой, и письма отправились случайным образом, однако каждое письмо было отправлено только одному клиенту, и каждому клиенту пришло только одно письмо. Докажите, что вероятность события «хотя бы один клиент получил письмо, которое предназначалось именно ему» стремится к $1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 2/3$ при $n \to \infty$.

Подсказка. По определению вероятностной меры, если события $A_1, \ldots, A_n$ попарно не пересекаются, то

$$\mathsf{P}\big\{A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n\big\} = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}\big\{A_i\big\}.$$

Можно доказать обобщение этой формулы для событий, которые могут пересекаться:

$$\mathsf{P}\big\{A_1 \cup \ldots \cup A_n\big\} = \\ = \sum_{i} \mathsf{P}\big\{A_i\big\} - \sum_{i<j} \mathsf{P}\big\{A_i \cap A_j\big\} + \sum_{i<j<k} \mathsf{P}\big\{A_i \cap A_j \cap A_k\big\} - \ldots$$

Задача может быть решена при помощи данной формулы, применённой для событий

$$A_i = \big\{i\text{-е письмо было отправлено клиенту, которому оно предназначалось}\big\}.$$