НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА
ЭКОНОМИКИ
ЛИЦЕЙ

Хочу в Лицей!

МАТЕМАТИКА

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ВСТУПИТЕЛЬНЫМ ЭКЗАМЕНАМ ПО МАТЕМАТИКЕ

в 10-й класс Лицея НИУ ВШЭ

А.В. Гиляровская
Ю.С. Рудько
А.Ф. Салимова
О.В. Смирнова

Второе издание

Издательский дом
Высшей школы экономики
МОСКВА, 2026

УДК 51(075)
ББК 22.1я7
М34

https://elibrary.ru/onvtuz

Учебное пособие рекомендовано к изданию
Педагогическим советом Лицея НИУ ВШЭ

Пособие подготовлено сотрудниками кафедры математики Лицея НИУ ВШЭ

Общая редакция: А.Ф. Салимова

М34 **Материалы для подготовки к вступительным экзаменам по математике в 10-й класс Лицея НИУ ВШЭ** / А. В. Гиляровская, Ю. С. Рудько, А. Ф. Салимова, О. В. Смирнова ; под общ. ред. А. Ф. Салимовой ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики», Лицей НИУ ВШЭ. — 2-е изд. — М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2026. — 102 с. — (Хочу в Лицей!). — 1000 экз. — ISBN 978-5-7598-4370-2 (в обл.). — ISBN 978-5-7598-4443-3 (e-book).

Настоящее пособие предназначено для учащихся 9-х классов, которые планируют поступать в 10-й класс Лицея НИУ ВШЭ. В пособии приведены демоварианты первого и второго этапов вступительных испытаний в 10-й класс Лицея НИУ ВШЭ, разборы заданий из этих вариантов, описаны критерии оценивания. Представлены варианты для самостоятельной подготовки к первому и второму этапам вступительных испытаний в 10-й класс.

УДК 51(075)
ББК 22.1я7

Опубликовано Издательским домом Высшей школы экономики
http://id.hse.ru

doi:10.17323/978-5-7598-4370-2

ISBN 978-5-7598-4370-2 (в обл.)
ISBN 978-5-7598-4443-3 (e-book)

Содержание

Предисловие 4
Литература, рекомендуемая для подготовки 5
Структура вступительного экзамена по математике в 10-й класс 6
Вступительные испытания 1-го этапа в 10-й класс 2023 г. 7
Решение заданий по математике 1-го этапа вступительных испытаний 2023 г. 10
Вступительные испытания 1-го этапа в 10-й класс 2024 г. 19
Вступительные испытания 2-го этапа в 10-й класс 2024 г. 20
Решение заданий по математике 2-го этапа вступительных испытаний 2024 г. 22
Задания для подготовки 28
1. Тождественные преобразования и вычисления 28
Задачи для самостоятельного решения 32
2. Задачи на проценты 37
Задачи для самостоятельного решения 39
3. Текстовые задачи 40
Задачи для самостоятельного решения 44
4. Линейная функция 46
Задачи для самостоятельного решения 48
5. Уравнения и неравенства 51
6. Прогрессии 55
Задачи для самостоятельного решения 56
7. Задачи с параметром, задачи на координатной плоскости и прямой 58
Задачи для самостоятельного решения 69
8. Основные факты школьной планиметрии 74
9. Задачи по геометрии из 1-го этапа вступительных испытаний 80
Примеры вступительных испытаний 83
Варианты задач по математике 1-го этапа вступительных испытаний в 10-й класс 83
Вариант 1 83
Вариант 2 84
Вариант 3 85
Вариант 4 86
Вариант 5 87
Вариант 6 88
Вариант 7 89
Вариант 8 90
Вариант 9 91
Варианты задач по математике 2-го этапа вступительных испытаний в 10-й класс 92
Вариант 1 92
Вариант 2 93
Вариант 3 94
Вариант 4 95
Вариант 5 96
Вариант 6 97
Вариант 7 98
Примерные задания устного собеседования в 10-й класс 99

Предисловие

Авторы данного пособия ставили своей целью помочь абитуриентам, поступающим в 10-й класс Лицея НИУ ВШЭ. Пособие содержит разбор демонстрационных вариантов и задания для самостоятельной подготовки. Часть этих заданий была взята из вариантов прошлых лет. В целом сборник дает понять ожидаемый уровень освоения математики абитуриентами.

Для поступления в Лицей НИУ ВШЭ всем абитуриентам необходимо успешно справиться с задачами по математике 1-го этапа вступительных испытаний. Поступающим на направления «Математика», «Информатика, инженерия и математика» и «Экономика и математика» необходимо продемонстрировать хороший уровень владения математикой в решении задач 2-го этапа вступительных испытаний. Задания для самостоятельного решения содержат задачи для подготовки к обоим этапам вступительных испытаний. Авторы уверены, что владение алгоритмами решения представленных здесь задач может служить хорошим дополнением к глубокому и основательному изучению курса школьной математики.

Выражаем нашу благодарность и признательность В.П. Барашеву, Б.В. Галицкому, В.Н. Деменко, О.А. Евсеевой, А.Б. Зубову, Е.М. Ивениной, А.В. Красинцу, И.А. Миткевич, О.В. Охтеменко, Д.С. Чистякову, Н.А. Шабат, А.В. Цареву, И.Х. Ямалиеву за помощь в подготовке этого пособия, бесценные идеи, замечания и поддержку.

С пожеланиями успехов,
авторы настоящего пособия

Литература, рекомендуемая для подготовки

1. Алгебра. 9-й класс: учебник / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. 14-е изд., стер. М.: Просвещение, 2023.
2. Алгебра. 9-й класс: учебник / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир; под ред. В.Е. Подольского. 8-е изд., стер. М.: Просвещение, 2023.
3. Алгебра. 9-й класс. Углубленный уровень: учебник / А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков; под ред. В.Е. Подольского. 8-е изд. М.: Просвещение, 2023.
4. Математика. Геометрия. 7–9-й классы. Базовый уровень: учебник / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. 14-е изд., перераб. М.: Просвещение, 2023.
5. Геометрия. 9-й класс: учебник / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир; под ред. В.Е. Подольского. 8-е изд. М.: Просвещение, 2023.
6. Геометрия. 9-й класс. Углубленный уровень: учебник / А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков; под ред. В.Е. Подольского. 6-е изд., стер. М.: Просвещение, 2023.
7. Геометрия. 9-й класс: учебник / В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, В.В. Прасолов; под ред. В.А. Садовничего. 8-е изд., стер. М.: Просвещение, 2022.
8. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра. М.: Физматлит, 2007.
9. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. М.: Физматлит, 2007.
10. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре: учеб. пособие для 8–9-го классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 2001.
11. Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9-й классы. М.: МЦНМО, 2004.
12. Иванов О.А. Практикум по элементарной математике: Алгебро-аналитические методы: учеб. пособие. М.: МЦНМО, 2001.
13. Кравцев С.В., Макаров Ю.Л., Максимов М.И. и др. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных. М.: Экзамен, 2001.
14. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: справочник. М.: Факториал, 1997.
15. Олехник С.Н., Потапов М.К., Нестеренко Ю.В. Конкурсные задачи по математике: справочное пособие. 3-е изд., стер. М.: Физматлит, 2003.
16. Сергеев И.Н. Математика: задачи с ответами и решениями. М.: КДУ, 2013.
17. Хорошилова Е.В. Элементарная математика: учеб. пособие для старшеклассников и абитуриентов. Часть 1. М.: МГУ, 2020.
18. Хорошилова Е.В. Элементарная математика: учеб. пособие для старшеклассников и абитуриентов. Часть 2. М.: МГУ, 2020.

Структура вступительного экзамена по математике в 10-й класс

Вступительные испытания 1-го этапа проходят все абитуриенты, поступающие в 10-й класс Лицея НИУ ВШЭ. Работа представляет собой тест и состоит из 10 заданий с открытым ответом.

Ответом является целое число или конечная десятичная дробь с 1–2 знаками после запятой. Проверка ответов осуществляется с помощью информационных технологий.

Задания оцениваются по шкале, приведенной в таблице:

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество баллов	0,5	1	1	1	1	1	1	1	1	1,5

Вступительные испытания 2-го этапа выполняют только поступающие на направления «Математика», «Информатика, инженерия и математика» и «Экономика и математика» Лицея НИУ ВШЭ. Она состоит из пяти заданий с развернутым ответом. Проверка решений осуществляется по критериям, устанавливаемым приемной комиссией Лицея НИУ ВШЭ.

Задания оцениваются по шкале, приведенной в таблице:

Номер задания	1	2	3	4	5
Количество баллов	3	3	4	5	5

Темы для подготовки: числа и вычисления (натуральные, целые, рациональные, действительные числа); алгебраические выражения (буквенные выражения, многочлены, алгебраические дроби); уравнения и неравенства (линейные, квадратные уравнения и неравенства с одной переменной и их системы); решение текстовых задач; числовые последовательности (арифметическая и геометрическая прогрессии, сложные проценты); функции, линейная функция, квадратичная функция, обратная пропорциональность, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = |x|$, их свойства и графики, решение уравнений и неравенств с использованием графиков функций; геометрические фигуры и их свойства (треугольники, многоугольники, окружность и круг); треугольники, элементы треугольника, медианы, высоты, биссектрисы треугольника и их свойства; равенство и подобие треугольников; прямоугольный треугольник и его свойства; параллельные прямые, их признаки и свойства; теорема Чевы, теорема Менелая; четырехугольники и их свойства; параллелограмм, трапеция; теорема синусов, теорема косинусов; площади фигур; окружность и ее свойства; вписанные и центральные углы; хорда, секущая и касательная окружности; взаимное расположение двух окружностей; вписанные и описанные окружности и их свойства.

Вступительные испытания 1-го этапа в 10-й класс

Задания по математике 2023 демо
Выполните задания (10 баллов)

$\boxed{\mathbf{1}}$ *(0,5 балла)* Вычислите: $58 \cdot \left(\left(2\frac{1}{14}\right)^{-2} - \left(1\frac{14}{15}\right)^{-2}\right)$.

или

Найдите значение выражения $(-6t)$, если $t = \frac{11}{6} : (2{,}65 : 2{,}5 - 1{,}1)$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ *(1 балл)* Решите уравнение

$$\frac{7}{x^2+3x-4} - \frac{3x+6}{x^2+x-2} = \frac{1}{1-x}.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите наименьший из них.

или

Решите неравенство

$$\left(\sqrt{x+2}+1\right) \cdot (7{,}3x - 20) \leq 0.$$

В ответе укажите количество целых чисел, являющихся решениями неравенства.

$\boxed{\mathbf{3}}$ *(1 балл)* В параллелограмме $MFKT$ угол T равен $135°$, а диагональ FT перпендикулярна стороне FK, которая равна 14. Найдите площадь параллелограмма $MFKT$.

или

Треугольник MPK равнобедренный. Известно, что MK — основание, угол при котором равен $75°$. Найдите длину стороны MP, если высота, проведенная к этой стороне, равна 18.

$\boxed{\mathbf{4}}$ *(1 балл)* Ежемесячный доход семьи равен 95 000 руб., причем 40% этой суммы составляет заработная плата Татьяны. В результате кризиса ее заработная плата снизилась на 10%. На сколько процентов снизился общий доход семьи, если доходы остальных членов семьи не изменились?

или

Динара и Карим состязались в беге на 1 км. Динара обогнала Карима на 90 с, но если бы Карим бежал в 1,5 раза быстрее, то он обогнал бы Динару на 1 мин. С какой скоростью бежала Динара? Ответ дайте в км/ч.

$\boxed{\mathbf{5}}$ *(1 балл)* Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые при делении на 3 дают остаток 1, а при делении на 4 — остаток 2.

или

Миша начал читать книгу. Каждый день он читал в 2 раза меньше страниц, чем в предыдущий, и прочитал книгу за 6 дней. Сколько страниц книги прочитал Миша за третий день, если в книге 189 страниц?

$\boxed{\mathbf{6}}$ *(1 балл)* Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции

$$f(x) = \sqrt{9 - x \cdot |x|} + \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 3}{10x^2 - 11x - 62}}.$$

или

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x+2}$ при условии, что аргумент принимает значения из области определения функции $g(x) = \sqrt{(x+5)(x+2)} + \sqrt{x+1}$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ *(1 балл)* Найдите значение выражения

$$\sqrt{18}\left(\sqrt{x} - 3\right)\sqrt{2x + 18 + 12\sqrt{x} - 6x}$$

при $x = 0{,}15$.

или

Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{3}a - \left(1 + 3\sqrt{3}\right)\sqrt{ab} + 3b}{\sqrt{a + 9b - 6\sqrt{ab}}} - \sqrt{b}$ при $a = 27$, $b = 5$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ *(1 балл)* Замените все буквы цифрами (одинаковые буквы — одинаковыми цифрами, разные буквы — разными), чтобы разность

ЛИЦЕЙ – ОГОНЬ

приняла наибольшее возможное значение. В ответе укажите это значение.

или

В конкурсе по поеданию булочек участвовало 5 человек. Все они съели разное количество булочек, и каждому удалось съесть хотя бы одну. Когда каждого участника спросили, сколько булочек в сумме было съедено за время конкурса, они назвали различные числа от 11 до 15, причем известно, что занявший первое место ошибся на 1, занявший второе место — на 2, третье — на 3, четвертое — на 4, пятое — на 5 булочек. Сколько булочек съел победитель конкурса?

$\boxed{\mathbf{9}}$ *(1 балл)* Окружность радиуса 3,5 вписана в треугольник KLT и касается сторон KT и KL соответственно в точках A и B. Известно, что $TA : AK = 1 : 2$, $KB : BL = 2 : 3$. Найдите наибольшую сторону треугольника KLT.

или

В треугольнике PKT мзвестны стороны: $PK = 12$, $PT = 15$, $KT = 18$. Проведена биссектриса PF. Окружность, описанная около треугольника PKF, пересекает сторону PT в точке M. Найдите периметр треугольника MFT.

$\boxed{\mathbf{10}}$ *(1,5 балла)* Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{ax^2 + x - a - 1}{\sqrt{1-x}} = 0$$

не имеет решений. В ответ запишите разность между наибольшим и наименьшим из таких значений.

или

Найдите значение параметра a, при котором расстояние между точками, заданными на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} y^2 - 4x + x^2 = 0, \\ 2y + ax - 3 = 0, \end{cases}$$

будет наибольшим.

Решение заданий по математике 1-го этапа вступительных испытаний 2023 г.

$\boxed{\mathbf{1}}$ *(0,5 балла)* Вычислите: $58 \cdot \left(\left(2\frac{1}{14}\right)^{-2} - \left(1\frac{14}{15}\right)^{-2}\right)$.

Решение. Запишем смешанные дроби в скобках в виде неправильных дробей:

$$\left(2\frac{1}{14}\right)^{-2} = \left(\frac{14}{29}\right)^2, \qquad \left(1\frac{14}{15}\right)^{-2} = \left(\frac{15}{29}\right)^2.$$

По формуле разности квадратов

$$\left(\frac{14}{29}\right)^2 - \left(\frac{15}{29}\right)^2 = \left(\frac{14}{29} - \frac{15}{29}\right) \cdot \left(\frac{14}{29} + \frac{15}{29}\right) = -\frac{1}{29}.$$

Умножая это число на 58, получим в итоге -2.

Ответ: -2.

или

Найдите значение выражения $(-6t)$, если $t = \frac{11}{6} : (2{,}65 : 2{,}5 - 1{,}1)$.

Решение. Сначала найдем значение выражения, стоящего в скобках:

$$2{,}65 : 2{,}5 - 1{,}1 = 265 : 250 - 1{,}1 = 1{,}06 - 1{,}1 = -0{,}04 = -\frac{1}{25}.$$

Далее выполним деление:

$$\frac{11}{6} : \left(-\frac{1}{25}\right) = -\frac{11 \cdot 25}{6}.$$

Тогда $-6t = 11 \cdot 25 = 275$.

Ответ: 275.

$\boxed{\mathbf{2}}$ *(1 балл)* Решите уравнение

$$\frac{7}{x^2 + 3x - 4} - \frac{3x + 6}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{1 - x}.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите наименьший из них.

Решение. Заметим, что

$$x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4), \qquad x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2).$$

Тогда

$$\frac{7}{(x - 1)(x + 4)} - \frac{3x + 6}{(x - 1)(x + 2)} = -\frac{1}{x - 1}.$$

Далее

$$\begin{cases} \dfrac{7}{x + 4} - \dfrac{3x + 6}{x + 2} = -1, \\ x \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq -2, \\ x \neq -4, \\ \dfrac{7}{x+4} - 3 = -1. \end{cases}$$

Данная система имеет единственное решение $x = -\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $-0{,}5$.

или

Решите неравенство

$$\left(\sqrt{x+2}+1\right) \cdot (7{,}3x-20) \leq 0.$$

В ответе укажите количество целых чисел, являющихся решениями неравенства.

Решение. На области допустимых значений $[-2; +\infty)$ имеем

$$\sqrt{x+2}+1 \geq 1.$$

Разделим неравенство на $\sqrt{x+2}+1$, получим

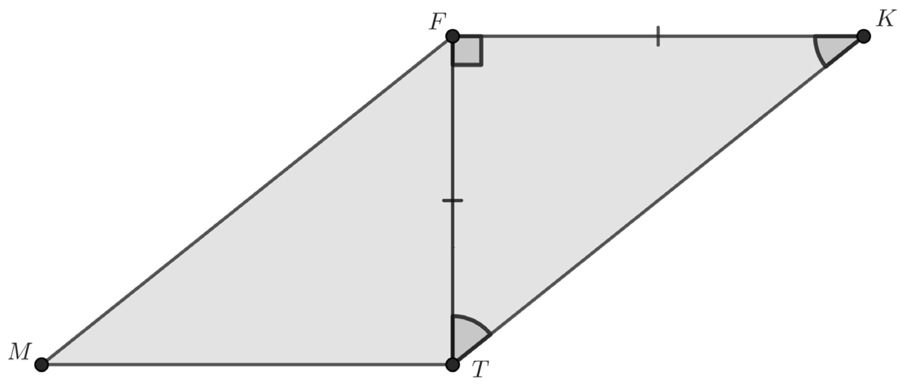
$$7,3x - 20 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2\frac{54}{73}.$$

Пересечем множество полученных значений x с условием $x \geq -2$. Таким образом, решениями неравенства являются числа из промежутка $\left[-2; 2\dfrac{54}{73}\right]$. В этом промежутке 5 целых чисел.

Ответ: 5.

$\boxed{3}$ *(1 балл)* В параллелограмме $MFKT$ угол T равен $135°$, а диагональ FT перпендикулярна стороне FK, которая равна 14. Найдите площадь параллелограмма $MFKT$.

Решение.



Если $\angle MTK = 135°$, то $\angle FKT = 45°$. Тогда $\angle FTK = 180° - 90° - 45° = 45°$. Значит, треугольник FTK равнобедренный и $FT = FK = 14$.

Отрезок FT является высотой параллелограмма.

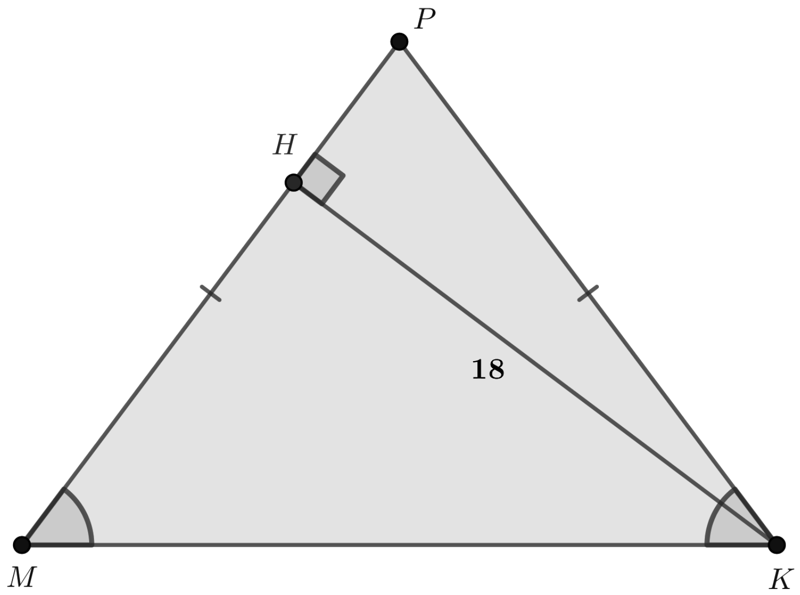
Получим $S_{MFKT} = FT \cdot FK = 14^2 = 196$.

Ответ: 196.

или

Треугольник MPK — равнобедренный. Известно, что MK — основание, угол при котором равен $75°$. Найдите длину стороны MP, если высота, проведенная к этой стороне, равна 18.

Решение.



Так как треугольник MPK равнобедренный, то

$$\angle MPK = 180° - 2 \cdot 75° = 30°.$$

Проведем высоту KH. В прямоугольном треугольнике PHK катет KH лежит против угла в $30°$, значит, $PM = PK = 2 \cdot 18 = 36$.

Ответ: 36.

$\boxed{4}$ *(1 балл)* Ежемесячный доход семьи равен 95 000 руб. Известно, что 40% этой суммы составляет заработная плата Татьяны. В результате кризиса ее заработная плата снизилась на 10%. На сколько процентов снизился общий доход семьи, если доходы остальных членов семьи не изменились?

Решение. Заработная плата Татьяны составляет $95\,000 \cdot 0{,}4 = 38\,000$ руб. Изменение ее заработной платы составит $38\,000 \cdot 0{,}1 = 3800$ руб. На эту же величину изменится доход семьи. Он снизится на $\dfrac{3800}{95\,000} \cdot 100\% = 4\%$.

Ответ: 4.

или

Динара и Карим состязались в беге на 1 км. Динара обогнала Карима на 90 с, но если бы Карим бежал в 1,5 раза быстрее, то он обогнал бы Динару на 1 мин. С какой скоростью бежала Динара? Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть x – скорость Динары, y – скорость Карима в км/мин. Тогда

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}.$$

Если Карим будет бежать в 1,5 раза быстрее, его скорость составит $1{,}5y$. Значит:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{1{,}5y} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{2}{3y} = 1.$$

Сложим полученные уравнения:

$$\frac{1}{y}-\frac{2}{3y}=\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{1}{y}=\frac{15}{2}.$$

Тогда $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}-\frac{3}{2}=6\Rightarrow x=\frac{1}{6}$ км/мин.

Выразим скорость в км/ч: $\frac{1}{6}$ км/мин составляет 10 км/ч.

Ответ: 10.

$\boxed{5}$ *(1 балл)* Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые при делении на 3 дают остаток 1, а при делении на 4 — остаток 2.

Решение. Обозначим через A число, удовлетворяющее условию задачи. Тогда

$$A=3k+1,\ k\in\mathbb{Z}\quad\Rightarrow\quad(A-1)\,\vdots\,3.$$

С другой стороны, по условию задачи число A при делении на 4 дает остаток 2, значит, это число можно представить в виде

$$A=4p+2,\ p\in\mathbb{Z}\quad\Rightarrow\quad(A-2)\,\vdots\,4.$$

Тогда

$$(A+2)\,\vdots\,12\quad\Rightarrow\quad A=12l-2=12(l-1)+10=12s+10,\quad l,s\in\mathbb{Z}.$$

Значит, нужно найти сумму трехзначных чисел, которые при делении на 12 будут давать остаток 10.

Определим их количество:

$$100\leq 12s+10\leq 999\quad\Rightarrow\quad 8\leq s\leq 82.$$

Тогда всего подходящих чисел 75.

Эти числа образуют арифметическую прогрессию с разностью $d=12$ и первым членом $a_1=106$, который получается при $s=8$. Найдем сумму прогрессии:

$$S=\frac{2\cdot 106+74\cdot 12}{2}\cdot 75=41\,250.$$

Ответ: 41 250.

или

Миша начал читать книгу. Каждый день он читал в 2 раза меньше страниц, чем в предыдущий, и прочитал книгу за 6 дней. Сколько страниц книги прочитал Миша за третий день, если в книге 189 страниц?

Решение. Числа, равные количеству страниц, которое Миша читал каждый день, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{2}$. Пусть x — количество страниц, прочитанных в первый день. Тогда по формуле суммы геометрической прогрессии получим

$$189=\frac{x\cdot(0{,}5^6-1)}{0{,}5-1}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{189\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{64}}=96.$$

Тогда в третий день Миша прочитал $96\cdot\frac{1}{4}=24$ страницы.

Ответ: 24.

$\boxed{6}$ *(1 балл)* Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции

$$f(x) = \sqrt{9 - x \cdot |x|} + \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 3}{10x^2 - 11x - 62}}.$$

Решение. Так как $\sqrt{5} - 3 < 0$, то второе слагаемое существует при условии

$$10x^2 - 11x - 62 < 0, \quad \text{откуда} \quad x \in \left(-2; \frac{31}{10}\right).$$

Первое слагаемое существует при условии $9 - x \cdot |x| \geq 0$. Рассмотрим два случая.

При $x \geq 0$ имеем $9 - x^2 \geq 0$, откуда $x \in [-3; 3]$. Пересечем с полученным условием для второго слагаемого, получим $x \in [0; 3]$.

При $x < 0$ получим неравенство $9 + x^2 \geq 0$, которое справедливо при всех x. В пересечении с условием для второго слагаемого получим $x \in (-2; 0)$.

Теперь объединим два полученных множества. Итак, $f(x)$ определена на промежутке $(-2; 3]$. Запишем целые числа из этого множества: -1; 0; 1; 2; 3. Сумма целых решений равна 5.

Ответ: 5.

или

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x+2}$ при условии, что аргумент принимает значения из области определения функции $g(x) = \sqrt{(x+5)(x+2)} + \sqrt{x+1}$.

Решение. Графиком функции $f(x)$ является гипербола, $x = -2$ — вертикальная асимптота, $y = 2$ — горизонтальная асимптота. Найдем область определения функции $g(x)$:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ (x+5)(x+2) \geq 0. \end{cases}$$

Получим, что $x \geq -1$. На этом промежутке функция $f(x)$ убывает. Значит, свое наибольшее значение на указанном промежутке она принимает в самой левой точке промежутка, т.е. при $x = -1$. Тогда наибольшее значение равно $f(-1) = 3$.

Ответ: 3.

$\boxed{7}$ *(1 балл)* Найдите значение выражения

$$\sqrt{18}\left(\sqrt{x} - 3\right)\sqrt{2x + 18 + 12\sqrt{x}} - 6x$$

при $x = 0{,}15$.

Решение. Заметим, что

$$2x + 18 + 12\sqrt{x} = 2(\sqrt{x} + 3)^2.$$

Так как $\sqrt{x}$ принимает неотрицательные значения при всех допустимых x, то

$$\sqrt{2(\sqrt{x} + 3)^2} = \sqrt{2} \cdot |\sqrt{x} + 3| = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{x} + 3).$$

Тогда при $x \geq 0$ имеем

$$\sqrt{18}\left(\sqrt{x} - 3\right) \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{x} + 3) - 6x = 6x - 54 - 6x = -54.$$

Ответ: -54.

или

Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{3}a-\left(1+3\sqrt{3}\right)\sqrt{ab}+3b}{\sqrt{a+9b-6\sqrt{ab}}}-\sqrt{b}$ при $a=27,\, b=5.$

Решение. При $a\geq 0,\ b\geq 0$ выражение в числителе дроби можно преобразовать следующим образом:

$$\sqrt{3}a-\left(1+3\sqrt{3}\right)\sqrt{ab}+3b=\sqrt{3}a-\sqrt{ab}-3\sqrt{3}\cdot\sqrt{ab}+3b=$$
$$=\sqrt{a}\left(\sqrt{3a}-\sqrt{b}\right)-3\sqrt{b}\left(\sqrt{3a}-\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{3a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right).$$

Выражение в знаменателе можно представить в виде квадрата разности:

$$a+9b-6\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right)^2.$$

Так как $a=27, b=5$, то $\sqrt{a}-3\sqrt{b}=3\sqrt{3}-3\sqrt{5}<0$, поэтому

$$\sqrt{\left(\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right)^2}=\left|\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right|=3\sqrt{b}-\sqrt{a}.$$

Тогда частное равно

$$\frac{\left(\sqrt{3a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right)}{-\left(\sqrt{a}-3\sqrt{b}\right)}=-\sqrt{3a}+\sqrt{b}.$$

Подставив данные числовые значения буквенных переменных, найдем значение исходного выражения: $-\sqrt{3a}+\sqrt{b}-\sqrt{b}=-\sqrt{3a}=-\sqrt{27\cdot 3}=-9.$

Ответ: -9.

$\boxed{8}$ *(1 балл)* Замените все буквы цифрами (одинаковые буквы — одинаковыми цифрами, разные буквы — разными), чтобы разность

ЛИЦЕЙ – ОГОНЬ

приняла наибольшее возможное значение. В ответе укажите это значение.

Решение. Чем больше уменьшаемое, тем больше разность. Наибольшее пятизначное число с различными цифрами — это 98 765.

Определим наименьшее возможное значение вычитаемого. На первую позицию нельзя поставить 0, поэтому $O=1$. Все остальные цифры различны, значит, самое маленькое возможное вычитаемое равно 10 123.

Тогда разность равна 88 642.

Ответ: 88 642.

или

В конкурсе по поеданию булочек участвовало 5 человек. Все они съели разное количество булочек, и каждому удалось съесть хотя бы одну. Когда каждого участника спросили, сколько булочек в сумме было съедено за время конкурса, они назвали различные числа от 11 до 15, причем известно, что занявший первое место ошибся на 1, занявший второе место — на 2, третье — на 3, четвертое — на 4, пятое — на 5 булочек. Сколько булочек съел победитель конкурса?

Решение. Количество булочек, которое могли съесть участники конкурса, не меньше чем $1+2+3+4+5=15$. Тогда меньше всего ошибся участник, назвавший число 15. Именно он занял первое место. Значит, всего было съедено 16 булочек.

Так как все участники съели различное количество булочек и каждый съел хотя бы одну, то победитель не мог съесть меньше 5 булочек.

Если победитель съел 5 булочек, то всего было съедено 15. Если он съел 6 булочек, то всего их могло быть 16: $16 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6$. Если победитель съел 7 и более булочек, то минимальная сумма не меньше числа $7 + 1 + 2 + 3 + 4 = 17 > 16$.

Ответ: 6.

$\boxed{9}$ *(1 балл)* Окружность радиуса 3,5 вписана в треугольник KLT и касается сторон KT и KL соответственно в точках A и B. Известно, что $TA : AK = 1 : 2$, $KB : BL = 2 : 3$. Найдите наибольшую сторону треугольника KLT.

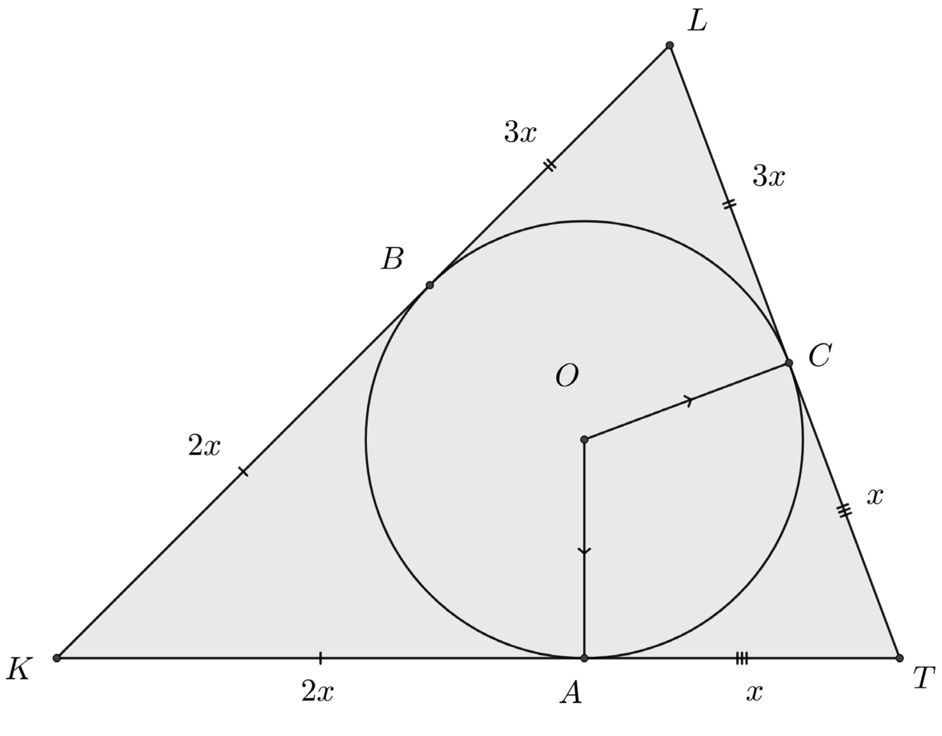
Решение. Выполним чертеж. Точку, в которой окружность касается стороны TL, обозначим C.

Пусть $AK = 2x$, $AT = x$ и $BK = 2y$, $BL = 3y$.

Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны, поэтому

$$BK = AK \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Так как $BL = CL$, $AT = CT$, то $KT = 3x$, $KL = 5x$, $TL = 4x$.



Заметим, что для сторон треугольника KLT выполняется соотношение

$$KL^2 = KT^2 + LT^2,$$

значит, это прямоугольный треугольник и $\angle KTL = 90°$.

Пусть O — центр вписанной окружности.

Тогда $OA \perp TK$, $OC \perp LT$ (радиусы, проведенные в точки касания). Значит, $OATC$ — прямоугольник. Так как $OC = OA$, то четырехугольник $OATC$ — квадрат.

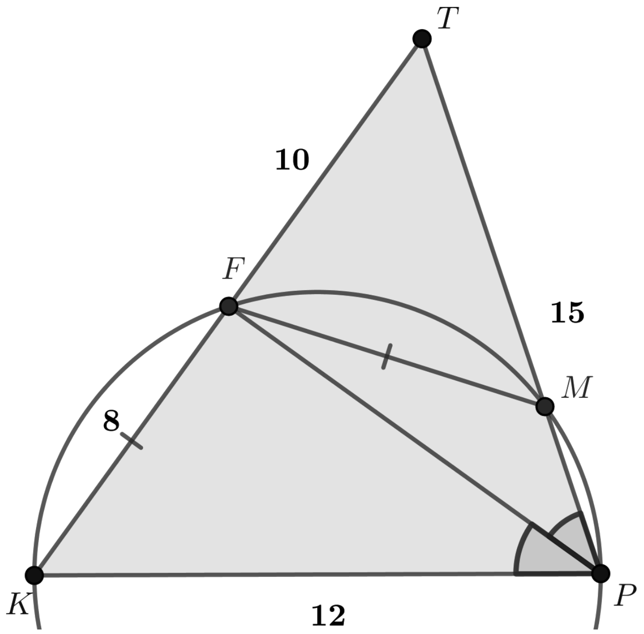
Получили, что $OA = 3{,}5 = x \quad \Rightarrow \quad KL = 5x = 17{,}5$.

Ответ: 17,5.

или

В треугольнике PKT мзвестны стороны: $PK = 12$, $PT = 15$, $KT = 18$. Проведена биссектриса PF. Окружность, описанная около треугольника PKF, пересекает сторону PT в точке M. Найдите периметр треугольника MFT.

Решение. Выполним чертеж.



По свойству биссектрисы имеем

$$\frac{KF}{FT} = \frac{KP}{TP} = \frac{4}{5}.$$

Из равенства $KT = KF + FT = 18$ следует, что $KF = 8$, $FT = 10$.

По теореме об отрезках секущих, проведенных из одной точки, имеем:

$$FT \cdot KT = MT \cdot PT \quad \Rightarrow \quad MT = 12.$$

Вписанные углы KPF и MPF равны, поэтому они опираются на равные хорды. Тогда $FM = 8$. Откуда $P_{MFT} = 10 + 8 + 12 = 30$.

Ответ: 30.

$\boxed{\textbf{10}}$ *(1,5 балла)* Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{ax^2 + x - a - 1}{\sqrt{1 - x}} = 0$$

не имеет решений. В ответ запишите разность между наибольшим и наименьшим значениями таких a.

Решение. Если $a = 0$, то $x = 1$ — корень числителя. Однако в этой точке знаменатель обращается в нуль. Уравнение не имеет решений при $a = 0$.

При любом $a \neq 0$ уравнение $ax^2 + x - a - 1 = 0$ имеет корни, так как

$$D = 1 + 4a^2 + 4a = (2a + 1)^2 \geq 0.$$

Тогда $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{a+1}{a}$. Чтобы исходное уравнение не имело решений, необходимо, чтобы $-\dfrac{a+1}{a} \geq 1$. Откуда $a \in [-0{,}5; 0)$.

Таким образом, $a \in [-0{,}5; 0]$. Найдем разность между наибольшим и наименьшим значениями: $0 - (-0{,}5) - 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

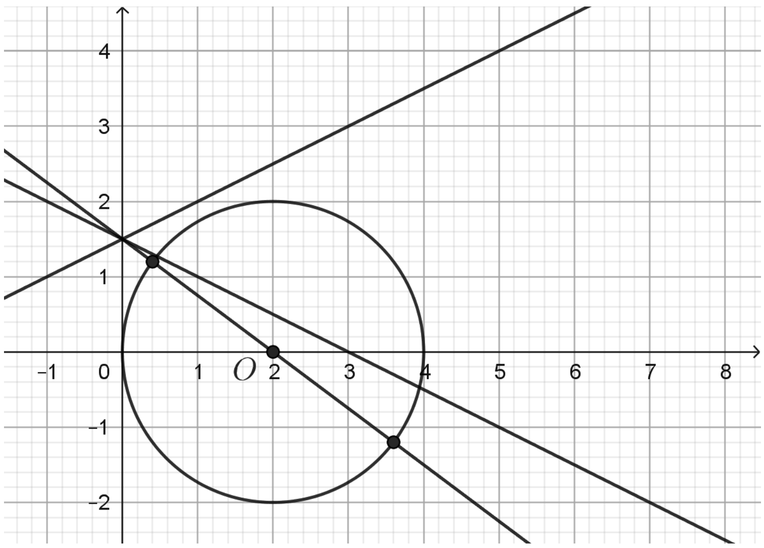
или

Найдите значение параметра a, при котором расстояние между точками, заданными на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} y^2 - 4x + x^2 = 0, \\ 2y + ax - 3 = 0, \end{cases}$$

будет наибольшим.

Решение. Первое уравнение системы на координатной плоскости определяет окружность $(x-2)^2 + y^2 = 4$ с центром в точке $(2,\ 0)$ и радиусом 2. Второе уравнение задает пучок прямых (кроме вертикальной) $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}$, проходящих через точку с координатами $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.



Решения системы — координаты общих точек окружности и прямой. Расстояние между точками будет наибольшим, если точки будут лежать на диаметре окружности, значит, прямая $y = -\frac{a}{2}\,x + \frac{3}{2}$ должна проходить через центр окружности. Подставим координаты центра окружности в уравнение прямой, получим:

$$0 = -a + \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad a = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

Вступительные испытания 1-го этапа в 10-й класс

Задания по математике 2024 демо

Выполните задания (10 баллов)

$\boxed{1}$ *(0,5 балла)* Найдите значение выражения $12{,}8 \cdot 0{,}25 \cdot \left(\frac{3}{8} - 1\right)$.

Ответ: -2.

$\boxed{2}$ *(1 балл)* Решите уравнение

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 8} = 2.$$

Ответ: 5.

$\boxed{3}$ *(1 балл)* Периметр ромба равен 52, а одна из его диагоналей равна 10. Найдите площадь ромба.

Ответ: 120.

$\boxed{4}$ *(1 балл)* Три круассана на 30% дороже двух круассанов и стакана кофе. Найдите цену круассана, если стакан кофе стоит 40 руб. Ответ дайте в рублях.

Ответ: 130.

$\boxed{5}$ *(1 балл)* Таня вязала платок. Сумма петель в 1-м и 10-м рядах оказалась равной 482. Сколько петель в 11-м ряду, если в каждом ряду Таня делала на 2 петли меньше, чем в предыдущем?

Ответ: 230.

$\boxed{6}$ *(1 балл)* Укажите сумму целых значений аргумента, входящих в область определения функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{28 - 3x - x^2}}{(|x| - 4)(x + 9)}.$$

Ответ: -18.

$\boxed{7}$ *(1 балл)* Найдите значение выражения

$$\frac{a\sqrt{a} - 1}{(\sqrt{a} - 1)^2 + 3\sqrt{a}} \cdot (\sqrt{a} + 1)$$

при $a = 2{,}7$.

Ответ: 1,7.

$\boxed{8}$ *(1 балл)* Миша, Коля и Вася вместе выполняют некоторую работу за 4 дня. Миша и Коля вдвоем выполняют эту работу за 6 дней, а Миша и Вася — за 8 дней. Во сколько раз производительность Коли выше производительности Васи?

Ответ: 1,5.

$\boxed{9}$ *(1 балл)* В треугольнике ABC, площадь которого равна 68, проведены высота BH и медиана AM. Расстояние между точками H и M равно 8. Найдите расстояние от точки A до прямой BC.

Ответ: 8,5.

$\boxed{10}$ *(1,5 балла)* На доске написано пятизначное число, в котором все цифры различны и нечетны. Если поменять местами первую и последнюю цифры числа, то оно будет делиться на 25, а если вычеркнуть вторую цифру числа, то оно будет делиться на 3. Какое число написано на доске, если известно, что оно оканчивается не на 9?

Ответ: 51 973.

Вступительные испытания 2-го этапа в 10-й класс

Задания по математике 2024 демо
для направлений «Информатика, инженерия и математика», «Экономика и математика»,«Математика»
Выполните задания (20 баллов)

1 *(3 балла)* Решите неравенство

$$\frac{25+30x-54x^2}{\sqrt{1-x^6}} \geq 0.$$

или

Найдите все значения переменной x, при которых выражение

$$\frac{\sqrt{3+x-|-x-3|}}{\sqrt{x^2-6x+7}-\sqrt{7-x}}$$

не имеет смысла.

2 *(3 балла)* Натуральное число называется палиндромом, если его десятичная запись одинаково читается слева направо и справа налево. Например, 12 321, 12 344 321 – палиндромы. Найдите все четырехзначные палиндромы, делящиеся на 15.

или

Мотоциклисты Айрат и Виталий ездят по круговой трассе по часовой стрелке, причем скорость Айрата больше скорости Виталия на 30 км/ч. В какой-то момент, одновременно проезжая мимо плаката «Жми на газ!», они оба увеличили свою скорость на 20 км/ч. В следующий раз после этого Айрат обогнал Виталия возле того же плаката, проехав с момента ускорения ровно 4 круга. Найдите скорости мотоциклистов до того, как они решили ускориться.

3 *(4 балла)* Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Продолжения стороны CD за точку C и стороны AB за точку B пересекаются в точке N. Площадь треугольника ABD равна 2, площадь треугольника ABC равна 1, $AB = BN$. Диагонали BD и AC пересекаются в точке O.

а) Докажите, что BC — средняя линия треугольника AND.

б) Найдите OD, если $BO = 0{,}5$.

или

Высота трапеции $ABCD$ равна 7. Известны длины оснований трапеции: $AD = 10$, $BC = 8$. Через точку E, лежащую на стороне CD, проведена прямая BE, которая пересекает диагональ AC в точке O так, что $AO : OC = 5 : 2$.

а) Докажите, что $CE : CD = 4 : 9$.

б) Найдите площадь треугольника OEC.

4 *(5 баллов)* На координатной плоскости Oxy фигура задана системой неравенств

$$\begin{cases} (|x|-4)(y-x+8) \leq 0, \\ y^2+x^2 \leq 8|x|. \end{cases}$$

Изобразите эту фигуру и вычислите ее площадь.

или

Дана функция $f(x) = |x+2| + |2x-6| - 8$. Изобразите на координатной плоскости графики функций $y = f(x)$ и $y = 7 - |x-t|$, где t — наименьшее значение функции $f(x)$. Вычислите площадь многоугольника, ограниченного данными графиками.

$\boxed{\mathbf{5}}$ *(5 баллов)* Найдите все такие значения параметра a, для каждого из которых множество решений уравнения

$$\frac{\sqrt{x^2+2ax+a^2}+\sqrt{x^2-6ax+9a^2}-4a}{\sqrt{4-x^2}} = 0$$

есть отрезок.

или

При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^2-4a^2}{|x|+2a} + \frac{x}{\sqrt{x^2}} + \frac{(\sqrt{x-a})^2}{x-a} = 0$$

имеет решения? В ответе укажите полученные значения a и соответствующие им решения.

Решение заданий по математике 2-го этапа вступительных испытаний 2024 г.

$\boxed{1}$ *(3 балла)* Решите неравенство

$$\frac{25+30x-54x^2}{\sqrt{1-x^6}} \geq 0.$$

Решение.

$$\begin{cases} x^6-1<0, \\ 54x^2-30x-24 \leq 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (x-1)(x+1)(x^4+x+1)<0, \\ x \in \left[\dfrac{5-5\sqrt{7}}{18}; \dfrac{5+5\sqrt{7}}{18}\right]. \end{cases}$$

Так как неполный квадрат суммы всегда принимает положительные значения, то

$$\begin{cases} x \in (-1;1), \\ x \in \left[\dfrac{5-5\sqrt{7}}{18}; \dfrac{5+5\sqrt{7}}{18}\right]. \end{cases}$$

Учтем, что $\dfrac{5+5\sqrt{7}}{18}-1=\dfrac{5\sqrt{7}-13}{18}>0$, так как $5\sqrt{7}>13$, а также что

$$\frac{5-5\sqrt{7}}{18}+1=\frac{23-5\sqrt{7}}{18}>0,$$

так как $5\sqrt{7}<23$. Тогда $x \in \left[\dfrac{5-5\sqrt{7}}{18};1\right)$.

Ответ: $x \in \left[\dfrac{5-5\sqrt{7}}{18};1\right)$.

или

Найдите все значения переменной x, при которых выражение

$$\frac{\sqrt{3+x-|-x-3|}}{\sqrt{x^2-6x+7}-\sqrt{7-x}}$$

не имеет смысла.

Решение. Выражение не имеет смысла, если

$$\left[\begin{array}{l} 3+x-|-x-3|<0, \\ x^2-6x+7<0, \\ x>7, \\ \sqrt{x^2-6x+7}=\sqrt{7-x}. \end{array}\right.$$

Обратите внимание на скобку! Используется знак совокупности. Рассмотрим отдельно каждое условие.

Неравенство вида $|f|>f$ равносильно неравенству $f<0$.

Тогда

$$3+x-|-x-3|<0 \quad \Rightarrow \quad |x+3|>x+3 \quad \Rightarrow \quad x<-3.$$

Далее

$$x^2-6x+7<0 \quad \Rightarrow \quad x \in (3-\sqrt{2};3+\sqrt{2}).$$

Уравнение $\sqrt{x^2-6x+7}=\sqrt{7-x}$ равносильно системе

$$\begin{cases} x \le 7, \\ x^2-6x+7=7-x. \end{cases}$$

Откуда $x=0$ или $x=5$.

Объединим все множества. Тогда

$$x \in (-\infty;-3) \cup \{0\} \cup (3-\sqrt{2};3+\sqrt{2}) \cup \{5\} \cup (7,+\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty;-3) \cup \{0\} \cup (3-\sqrt{2};3+\sqrt{2}) \cup \{5\} \cup (7,+\infty)$.

$\boxed{2}$ *(3 балла)* Натуральное число называется палиндромом, если его десятичная запись одинаково читается слева направо и справа налево. Например, 12 321, 12 344 321 — палиндромы. Найдите все четырехзначные палиндромы, делящиеся на 15.

Решение. Число делится на 15, значит, оно делится на 3 и на 5 (3 и 5 взаимно простые). Четырехзначный палиндром имеет вид $A=\overline{abba}$, где a, b — цифры. Если $A\,\vdots\,5$, то $a=0$ или $a=5$. Первый вариант не подходит, так как число не может начинаться с нуля. Значит, $a=5$.

Так как $A\,\vdots\,3$, то $(10+2b)\,\vdots\,3$. Подходят значения 1, 4 и 7.

Ответ: 5115, 5445, 5775.

или

Мотоциклисты Айрат и Виталий ездят по круговой трассе по часовой стрелке, причем скорость Айрата больше скорости Виталия на 30 км/ч. В какой-то момент, одновременно проезжая мимо плаката «Жми на газ!», они оба увеличили свою скорость на 20 км/ч. В следующий раз после этого Айрат обогнал Виталия возле того же плаката, проехав с момента ускорения ровно 4 круга. Найдите скорости мотоциклистов до того, как они решили ускориться.

Решение. Пусть v_A и v_B — скорости Айрата и Виталия после ускорения (в км/ч), l — длина трассы (в км). После ускорения за время t Айрат обогнал Виталия на 1 круг, значит, $l=(v_A-v_B)t \Rightarrow t=\dfrac{l}{30}$. За это же время Айрат проехал 4 круга, тогда

$$v_A = 4l : \frac{l}{30} \quad \Rightarrow \quad v_A = 120.$$

До ускорения скорость Айрата была равна 100 км/ч, тогда скорость Виталия — 70 км/ч.

Ответ: 100 и 70.

$\boxed{3}$ *(4 балла)* Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Продолжения стороны CD за точку C и стороны AB за точку B пересекаются в точке N. Площадь треугольника ABD равна 2, площадь треугольника ABC равна 1, $AB=BN$. Диагонали BD и AC пересекаются в точке O.

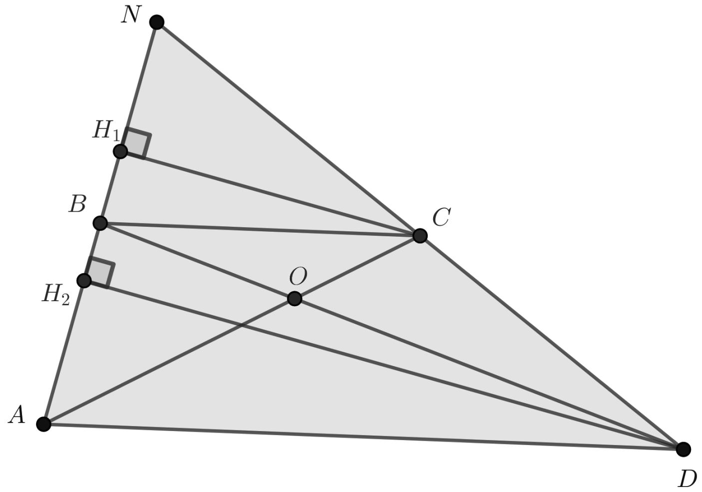
а) Докажите, что BC — средняя линия треугольника AND.

б) Найдите OD, если $BO=0{,}5$.

Решение.

а) Проведем высоты CH_1 и DH_2 к общей стороне треугольников ABC и ABD. Тогда $CH_1 || DH_2$.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{DH_2}{CH_1} = 2.$$



Треугольники CNH_1 и DNH_2 подобны по двум углам. Значит, $\dfrac{NC}{ND} = \dfrac{CH_1}{DH_2} = \dfrac{1}{2}$. Тогда C — середина ND и BC является средней линией треугольника AND.

б) Так как BC – средняя линия, то $BC||AD$. Треугольники BOC и AOD подобны по двум углам, тогда

$$\frac{BO}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad OD = 2BO = 1.$$

Ответ: 1.

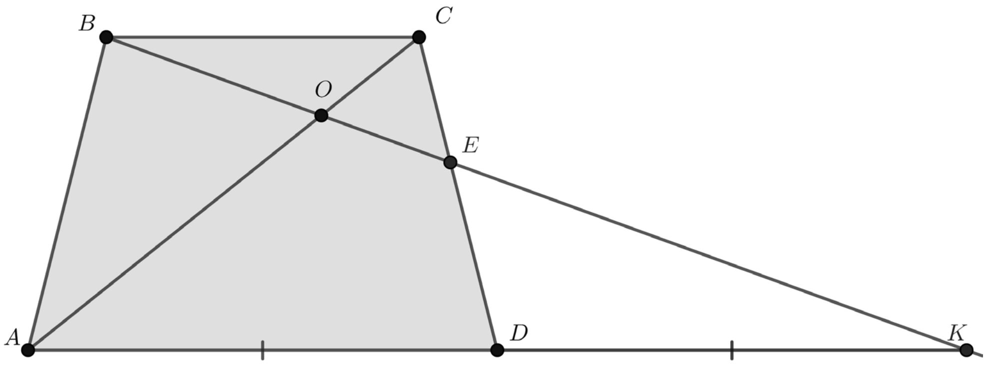
или

Высота трапеции $ABCD$ равна 7. Известны длины оснований трапеции: $AD = 10$, $BC = 8$. Через точку E, лежащую на стороне CD, проведена прямая BE, которая пересекает диагональ AC в точке O так, что $AO : OC = 5 : 2$.

а) Докажите, что $CE : CD = 4 : 9$.

б) Найдите площадь треугольника OEC.

Решение.



а) Пусть прямая BE пересекает AD в точке K. Тогда треугольники BOC и AOK подобны по двум углам, тогда

$$\frac{BC}{AK} = \frac{CO}{AO} = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad AK = 20.$$

Так как $AK = AD+DK$, то $DK = 10$. Из подобия треугольников BCE и DKE следует:

$$\frac{BC}{DK}=\frac{CE}{DE}=\frac{4}{5}\Rightarrow\frac{CE}{CD}=\frac{4}{9}.$$

б) Треугольники COE и ACD имеют общий угол, поэтому

$$\frac{S_{OCE}}{S_{ACD}}=\frac{CO\cdot CE}{AC\cdot CD}=\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{9}=\frac{8}{63}.$$

Так как $S_{ACD}=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 10=35$, то $S_{OCE}=\frac{8}{63}\cdot 35=\frac{40}{9}$.

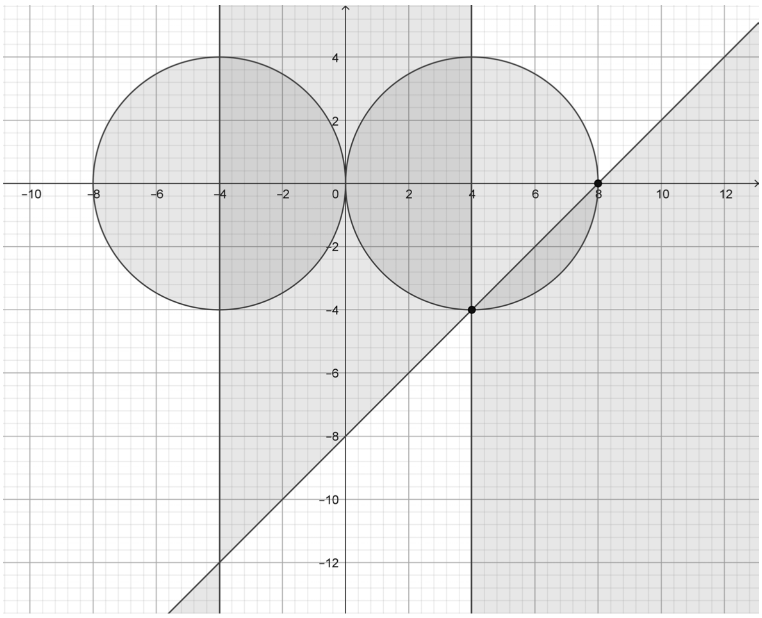
Ответ: $\frac{40}{9}$.

$\boxed{4}$ *(5 баллов)* На координатной плоскости Oxy фигура задана системой неравенств

$$\begin{cases}(|x|-4)(y-x+8)\le 0,\\ y^2+x^2\le 8|x|.\end{cases}$$

Изобразите эту фигуру и вычислите ее площадь.

Решение.



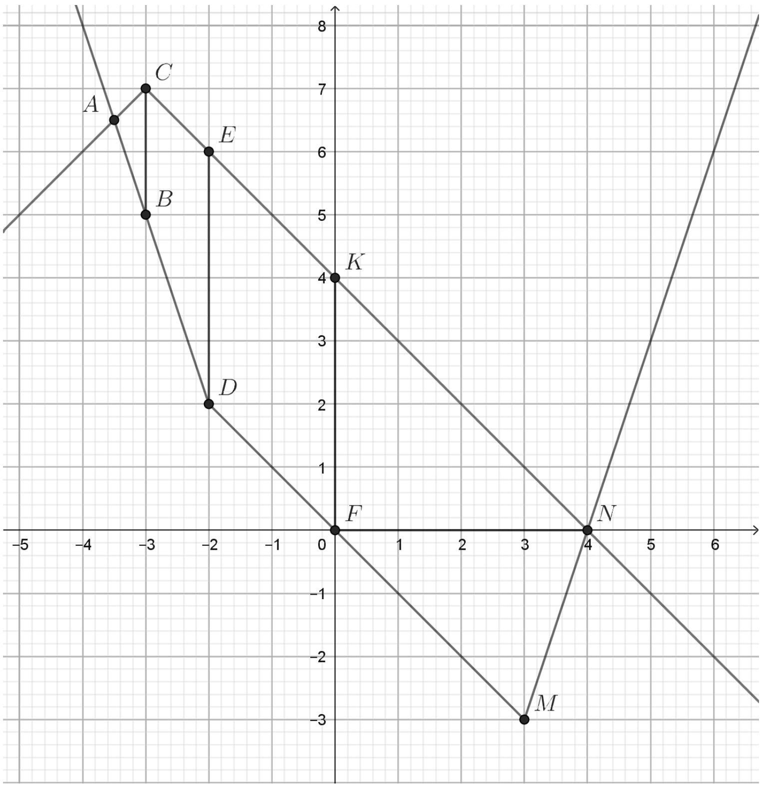
Прямые $x=\pm 4$, $y=x-8$ делят плоскость на шесть областей. Нужные области выделены на рисунке. Уравнение $y^2+x^2=8|x|$ задает на координатной плоскости две окружности $(x-4)^2+y^2=16$ и $(x+4)^2+y^2=16$, симметричные относительно оси ординат. Решения второго неравенства системы — точки на этих окружностях и внутри них. Найдем площадь фигуры:

$$S=\pi R^2+\frac{1}{4}\pi R^2-\frac{1}{2}R^2=20\pi-8.$$

Ответ: $20\pi-8$.

или

Дана функция $f(x)=|x+2|+|2x-6|-8$. Изобразите на координатной плоскости графики функций $y=f(x)$ и $y=7-|x-t|$, где t — наименьшее значение функции $f(x)$. Вычислите площадь многоугольника, ограниченного данными графиками.



Решение. Так как коэффициент при переменной x во втором модуле больше, чем коэффициент при переменной x в первом модуле, характер монотонности функции $f(x)$ на разных промежутках будет зависеть от второго модуля. При $x \geq 3$ функция $f(x)$ возрастает, а при $x \leq 3$ убывает. Значит, $x = 3$ — точка минимума. Наименьшее значение равно $f(3) = -3$.

Разделим фигуру, образованную пересечением ломаных, на части. Определим координаты точки A:

$$\begin{cases} y = 10 + x, \\ y = -4 - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3,5, \\ y = 6,5. \end{cases}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2}, \; S_{BCED} = \frac{2+4}{2} \cdot 1 = 3, \; S_{DEKF} = 2 \cdot 4 = 8,$$

$$S_{KFN} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8, \quad S_{FNM} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6.$$

Площадь фигуры $S = 25{,}5$.

Ответ: 25,5.

$\boxed{5}$ *(5 баллов)* Найдите все такие значения параметра a, для каждого из которых множество решений уравнения

$$\frac{\sqrt{x^2 + 2ax + a^2} + \sqrt{x^2 - 6ax + 9a^2} - 4a}{\sqrt{4 - x^2}} = 0$$

есть отрезок.

Решение. Заметим, что подкоренные выражения в числителе дроби являются полными квадратами, поэтому

$$\frac{\sqrt{(x+a)^2} + \sqrt{(x-3a)^2} - 4a}{\sqrt{4 - x^2}} = 0,$$

$$\frac{|x+a|+|x-3a|-4a}{\sqrt{4-x^2}}=0.$$

Нужно найти те значения параметра a, при которых значение выражения

$$|x+a|+|x-3a|-4a$$

равно 0 при любых x.

Заметим, что $(x+a)-(x-3a)=4a$. Тогда

$$\begin{cases} x+a \geq 0, \\ x-3a \leq 0, \\ x \in (-2;2) \end{cases} \Rightarrow \quad a \in \left(0;\frac{2}{3}\right).$$

Ответ: $a \in \left(0;\dfrac{2}{3}\right)$.

или

При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^2-4a^2}{|x|+2a}+\frac{x}{\sqrt{x^2}}+\frac{(\sqrt{x-a})^2}{x-a}=0$$

имеет решения? В ответе укажите полученные значения a и соответствующие им решения.

Решение. Заметим, что $x^2=|x|^2$, поэтому числитель первой дроби удобно разложить на скобки $(|x|-2a)(|x|+2a)$, тогда при условии на корень в третьем слагаемом получим:

$$\begin{cases} \dfrac{(|x|-2a)(|x|+2a)}{|x|+2a}+\dfrac{x}{|x|}+\dfrac{x-a}{x-a}=0, \\ x>a. \end{cases}$$

Тогда можем записать:

$$\begin{cases} x>a, \\ |x|+2a \neq 0, \\ |x|-2a+\dfrac{x}{|x|}+1=0. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая. При $x>0$ имеем:

$$\begin{cases} x>0, \\ x>a, \\ x+2a \neq 0, \\ x-2a+1+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2a-2, \\ 2a-2>0, \\ 2a-2+2a \neq 0, \\ 2a-2>a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2a-2, \\ a>2. \end{cases}$$

При $x<0$ получим:

$$\begin{cases} x<0, \\ x>a, \\ -x+2a \neq 0, \\ -x-2a-1+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2a, \\ -2a<0, \\ -2a>a, \\ -2a+2a \neq 0. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет ни при каких a. Значит, при $a>2$ решение $x=2a-2$.
Ответ: при $a>2$ решение $x=2a-2$.

Задания для подготовки

1. Тождественные преобразования и вычисления

$\forall x, y \in \mathbb{R}\ \ \forall a, b > 0$ выполняется:

1 $a^0 = 1$.

2 $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

3 $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

4 $(a^x)^y = a^{xy}$.

5 $(ab)^x = a^x b^x$.

6 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

7 $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ выполняется:

8 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

9 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

10 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

11 $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

12 $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$.

13 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

14 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

$\forall a, b \geq 0$ выполняется:

15 $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

16 $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $b \neq 0$.

17 $(\sqrt{a})^2 = a$ при $a \geq 0$.

18 $\sqrt{a^2} = |a|$ при любых $a \in \mathbb{R}$.

19 $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$

20 Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Пример 1. Вычислите $\left(\dfrac{(2{,}7-0{,}8)\cdot 2\dfrac{1}{3}}{(5{,}2-1{,}4):\dfrac{3}{70}}+0{,}125\right):2\dfrac{1}{2}+0{,}43.$

Решение. Выполним отдельные действия:

1) $(2{,}7-0{,}8)\cdot 2\dfrac{1}{3}=1{,}9\cdot 2\dfrac{1}{3}=\dfrac{19}{10}\cdot\dfrac{7}{3}=\dfrac{133}{30};$

2) $(5{,}2-1{,}4):\dfrac{3}{70}=3,8\cdot\dfrac{70}{3}=\dfrac{19}{5}\cdot\dfrac{70}{3}=\dfrac{1330}{15};$

3) $\dfrac{133}{30}:\dfrac{1330}{15}=\dfrac{133}{30}\cdot\dfrac{15}{1330}=\dfrac{1}{20};$

4) $\dfrac{1}{20}+0{,}125=\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{2}{40}+\dfrac{5}{40}=\dfrac{7}{40};$

5) $\dfrac{7}{40}:2\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{40}:\dfrac{5}{2}=\dfrac{7}{40}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{14}{200}=\dfrac{7}{100}=0{,}07;$

6) $0{,}07+0{,}43=0{,}5.$

Ответ: 0,5.

Пример 2. Вычислите

$$\frac{49\cdot\sqrt{3{,}7\cdot 1{,}2}\left(\sqrt{\dfrac{3{,}7}{1{,}2}}-\sqrt{\dfrac{1{,}2}{3{,}7}}\right)}{\sqrt{(3{,}7+1{,}2)^2-4\cdot 3{,}7\cdot 1{,}2}}.$$

Решение. Выполним сначала все действия в числителе, а затем — в знаменателе:

1) $\sqrt{3{,}7\cdot 1{,}2}\left(\sqrt{\dfrac{3{,}7}{1{,}2}}-\sqrt{\dfrac{1{,}2}{3{,}7}}\right)=\sqrt{3{,}7\cdot 1{,}2}\cdot\sqrt{\dfrac{3{,}7}{1{,}2}}-\sqrt{3,7\cdot 1,2}\cdot\sqrt{\dfrac{1,2}{3,7}}=$

$=\dfrac{\sqrt{3{,}7}\sqrt{1{,}2}\sqrt{3{,}7}}{\sqrt{1{,}2}}-\dfrac{\sqrt{1{,}2}\sqrt{3{,}7}\sqrt{1{,}2}}{\sqrt{3{,}7}}=(\sqrt{3{,}7})^2-(\sqrt{1{,}2})^2=3{,}7-1{,}2=2{,}5;$

2) $\sqrt{(3{,}7+1{,}2)^2-4\cdot 3{,}7\cdot 1{,}2}=\sqrt{3{,}7^2+2\cdot 3{,}7\cdot 1{,}2+1{,}2^2-4\cdot 3{,}7\cdot 1{,}2}=$

$=\sqrt{3,7^2-2\cdot 3,7\cdot 1,2+1,2^2}=\sqrt{(3,7-1{,}2)^2}=\sqrt{2{,}5^2}=2{,}5;$

3) $\dfrac{2{,}5}{2{,}5}=1.$

Ответ: 49.

Пример 3. Вычислите $\sqrt{2}(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{8-2\sqrt{15}}.$

Решение. Рассмотрим последний сомножитель:

1) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{5+3-2\sqrt{15}}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{3})^2-2\sqrt{5}\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}=$

$=|\sqrt{5}-\sqrt{3}|=\sqrt{5}-\sqrt{3};$

2) $(\sqrt{10}-\sqrt{6})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=(\sqrt{2\cdot 5}-\sqrt{2\cdot 3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=$

$= \sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 = \sqrt{2}((\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2) = \sqrt{2}(8 - 2\sqrt{15});$

3) $(4 + \sqrt{15})\sqrt{2}(8 - 2\sqrt{15}) = (4 + \sqrt{15})\sqrt{2} \cdot 2(4 - \sqrt{15}) =$

$= 2\sqrt{2}(4 + \sqrt{15})(4 - \sqrt{15}) = 2\sqrt{2}(4^2 - (\sqrt{15})^2) = 2\sqrt{2}(16 - 15) = 2\sqrt{2};$

4) $\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4.$

Ответ: 4.

Пример 4. Сократите дробь
$$\frac{x^2 + 5ax - 6a^2}{x^2 - 3ax + 2a^2}.$$

Решение. Посмотрим на выражение $x^2 + 5ax - 6a^2$ как на квадратный трехчлен и найдем его корни. Найдем его дискриминант:
$$D = (5a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6a^2) = 25a^2 + 24a^2 = 49a^2,$$
а затем применим формулу для корней квадратного уравнения
$$x_1 = \frac{-5a + 7a}{2} = a, \quad x_2 = \frac{-5a - 7a}{2} = -6a.$$
Следовательно, $x^2 + 5ax - 6a^2 = (x - a)(x + 6a)$.

Аналогично $x^2 - 3ax + 2a^2 = (x - a)(x - 2a)$.

Получим:
$$\frac{x^2 + 5ax - 6a^2}{x^2 - 3ax + 2a^2} = \frac{(x - a)(x + 6a)}{(x - a)(x - 2a)} = \frac{x + 6a}{x - 2a}.$$

Ответ: $\dfrac{x + 6a}{x - 2a}$.

Пример 5. Найдите значение выражения
$$\left(-1\frac{3}{7} \cdot a^2 b\right)^3 \cdot \left(\frac{49\,b}{a^3}\right)^2 \cdot \frac{1}{b^5}$$
при $a = -2{,}07$; $b = -\dfrac{3}{5}$.

Решение. Преобразуем выражение
$$\left(-1\frac{3}{7} \cdot a^2 b\right)^3 \cdot \left(\frac{49\,b}{a^3}\right)^2 \cdot \frac{1}{b^5} = \left(-\frac{10}{7}\right)^3 a^6 b^3 \cdot \frac{49^2 b^2}{a^6} \cdot \frac{1}{b^5} =$$
$$= -\frac{10^3 \cdot 7^4 a^6 b^5}{7^3 a^6 b^5} = -7000.$$
Ответ: -7000.

Пример 6. Упростите выражение
$$\left(\frac{x^2}{x^2 + xy + y^2} - \left(\frac{x}{x - y} - \frac{xy(x + y)}{x^3 - y^3}\right)\right) : \frac{x^2 y}{x^2 - y^2} + \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2}$$
и найдите его значение при $x = 1{,}5;\ y = \dfrac{2}{3}$.

Решение. Преобразуем выражение во внутренней скобке:

$$\frac{x}{x-y}-\frac{xy(x+y)}{x^3-y^3}=\frac{x(x^2+xy+y^2)-xy(x+y)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=$$

$$=\frac{x^3+x^2y+xy^2-x^2y-xy^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{x^3}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}.$$

Тогда все выражение в скобке можно упростить:

$$\frac{x^2}{x^2+xy+y^2}-\frac{x^3}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=$$

$$=\frac{x^3-x^2y-x^3}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{-x^2y}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}.$$

Заменим деление умножением:

$$\frac{-x^2y}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}\cdot\frac{(x-y)(x+y)}{x^2y}=\frac{-(x+y)}{x^2+xy+y^2}.$$

Значение выражения будет равно 0:

$$\frac{-(x+y)}{x^2+xy+y^2}+\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}=0.$$

Ответ: 0.

Задачи для самостоятельного решения

$\boxed{\mathbf{1}}$ Вычислите $5{,}85 : 0{,}25 - 4{,}56 \cdot 0{,}8$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Вычислите $(0{,}894 : 0{,}3 + 6{,}4) \cdot 2{,}1 + 0{,}11$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Вычислите $\left(5\dfrac{1}{4} - 14{,}75\right) : 0{,}4 - 3{,}37$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Вычислите $\left(2\dfrac{3}{11} - 3\dfrac{4}{121}\right) : \dfrac{10}{5{,}86 + 115\dfrac{7}{50}}$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Вычислите $0{,}47 \cdot 2{,}34 - 8{,}37 \cdot 2\dfrac{2}{3}$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Вычислите $\dfrac{9{,}8^3 - 7{,}2^3}{1{,}3} + 14{,}4 \cdot 9{,}8$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Вычислите $\dfrac{76{,}3^3 - 23{,}7^3}{52{,}6} + 23{,}7 \cdot 76{,}3$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Вычислите $\dfrac{(-9)^5 \cdot 4^4}{6^8}$.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Вычислите $\dfrac{(-5)^{11} \cdot (-2)^9}{10^{12}}$.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Найдите значение выражения

$$27x^3 + 27x^2y + 9xy^2 + y^3$$

при $x = 1{,}23$; $y = -2{,}69$.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Найдите значение выражения

$$\frac{(11{,}2)^8 - \left(\frac{1}{5}\right)^8}{\left((11{,}2)^4 - \left(\frac{1}{5}\right)^4\right) \cdot \left((11{,}2)^3 + (11{,}2)^2 \cdot \frac{1}{5} + 11{,}2 \cdot \frac{1}{25} + \frac{1}{125}\right)}.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$ Найдите значение выражения $5x^2 - 7x - 4$ при $x = \dfrac{7 - \sqrt{129}}{10}$.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Вычислите

$$\frac{3}{\sqrt{2} - 1} - \frac{\sqrt{2}(6 - 3\sqrt{8})}{2}.$$

$\boxed{\mathbf{14}}$ Вычислите

$$\frac{\sqrt{5}(3\sqrt{125} - 10)}{5} + \frac{8}{\sqrt{5} - 1}.$$

$\boxed{\mathbf{15}}$ Вычислите

$$\left(\frac{1}{3 - 2\sqrt{5}} - \frac{1}{3 + 2\sqrt{5}}\right) \cdot \sqrt{605}.$$

16 Вычислите

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}+\frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)\cdot(2\sqrt{3}+9).$$

17 Вычислите

$$\frac{\sqrt{48}-\sqrt{75}+\sqrt{27}}{\sqrt{108}+\sqrt{12}}.$$

18 Вычислите

$$\frac{\sqrt{50}-\sqrt{72}+\sqrt{18}}{\sqrt{162}-\sqrt{128}}.$$

19 Вычислите

$$\frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}\cdot 2\sqrt{2}.$$

20 Вычислите

$$\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}+\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}.$$

21 Вычислите

$$(\sqrt{28}-\sqrt{252}+2\sqrt{63}):\sqrt{7}.$$

22 Найдите значение выражения

$$(\sqrt{21}-2)\cdot\sqrt{25+2\sqrt{84}}.$$

23 Найдите значение выражения

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{6+\sqrt{35}}\cdot\frac{\sqrt{125}-\sqrt{343}}{12+\sqrt{35}}.$$

24 Найдите значение выражения

$$\frac{(\sqrt{17}-2)\cdot(\sqrt{34}+\sqrt{8}+\sqrt{17}+2)}{\sqrt{2}+1}.$$

25 Упростите выражение

$$\left(\frac{12-y}{6y-36}-\frac{6}{y^2-6y}\right)\cdot\left(\frac{5y^2+30y}{36-y^2}-\frac{y}{y-6}\right).$$

26 Найдите значение выражения

$$\frac{a^3-3ab\,(a-b)-b^3}{a^2-b\,(2a-b)}:\frac{(a+b)^2-ab}{a^4-ab^3}$$

при $a=3{,}35$; $b=2{,}35$.

$\boxed{\mathbf{27}}$ Найдите значение выражения

$$\left(\frac{ab}{b-a}+b\right):\left(\frac{ab}{a-b}+a\right),$$

если $\dfrac{a}{b}=0{,}2$.

$\boxed{\mathbf{28}}$ Упростите выражение

$$\frac{4}{3x+1}-\left(\frac{2x}{3x+1}-\frac{2x}{3x-1}\right):\frac{x-3x^2}{9x^2-6x+1}+x^2$$

и найдите его числовое значение при $x=2{,}5$.

$\boxed{\mathbf{29}}$ Упростите выражение

$$\left(x-\frac{x^3+8}{x^2+2x}\right)\cdot\frac{4x^2}{(x-2)^2}-\frac{5x+6}{x-2}$$

и найдите его числовое значение при $x=5{,}2$.

$\boxed{\mathbf{30}}$ Упростите выражение

$$\frac{3x+21}{x+9}+\left(\frac{x+7}{x^2-18x+81}+\frac{x+5}{x^2-81}\right):\frac{(x+3)^2}{3(x-9)^2}.$$

$\boxed{\mathbf{31}}$ Упростите выражение

$$\frac{x-1}{x+1}:\left(\frac{3x+1}{2x^2+4x+2}-\frac{1}{x+1}\right)-2(x-5).$$

$\boxed{\mathbf{32}}$ Упростите выражение

$$\left(\frac{x}{x-4}-\frac{x+1}{x^2-16}-\frac{x}{x+4}\right):\frac{7x-1}{x^2-16}.$$

$\boxed{\mathbf{33}}$ Упростите выражение

$$\frac{x^3+2x^2}{x-2}:\left(\frac{2}{x+2}+\frac{x^2+4}{x^2-4}-\frac{2}{2-x}\right).$$

$\boxed{\mathbf{34}}$ Упростите выражение

$$\left(\frac{x}{x-3}+\frac{5x-6}{3x-x^2}-\frac{1}{x}\right):\frac{x^3-9x}{x+3}.$$

$\boxed{\mathbf{35}}$ Упростите выражение

$$\left(1-\frac{x-1}{x^2}-\frac{1}{x^3+x^2}\right):\frac{x^2}{2x^2+4x+2}.$$

36 Упростите выражение

$$\frac{x^2}{3-6x+3x^2} : \left(\frac{x+1}{x^2} - \frac{1}{x^2-x^3} + 1\right)$$

и найдите его числовое значение при $x = -9$.

37 Найдите значение a, при котором равенство

$$\frac{8x-35a-3}{15a} = \left(\frac{7}{3} + \frac{1}{5a}\right)(x-1) + \frac{x}{3}$$

выполняется при любом x.

38 Найдите числа a и b, при которых равенство

$$(3x+4)^2 = (3b-4a)\cdot x^2 + \frac{12}{b}(17-a)\cdot x + 16$$

является верным для всех значений x.

39 Найдите числа a и b из тождества

$$\frac{3x+11}{x^2+4x-21} = \frac{a}{x+7} + \frac{b}{x-3}.$$

40 Найдите числа a, b и c из тождества

$$\frac{1}{x^3+x^2-2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}.$$

41 Найдите наибольшее значение выражения

$$4y(5x-y) - (5x-1)(5x+1) + 8.$$

42 При каких натуральных значениях n выражение $\dfrac{3n+8}{n+1}$ является целым числом?

43 Известно, что $\dfrac{6y-5x}{5y+4x} = \dfrac{1}{2}$. Найдите значение выражения $\dfrac{11x-3y}{5x+y}$.

44 Найдите значение выражения

$$\sqrt{7,32 + 2\cdot\sqrt{7,32-1}}\cdot(\sqrt{6,32}-1).$$

45 Найдите значение выражения

$$\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{57}+\sqrt{69}+\sqrt{123}}{\sqrt{41}+\sqrt{19}+\sqrt{23}}.$$

46 Найдите значение выражения

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x+99}+\sqrt{x+98}}$$

при $x = 0{,}01$.

$\boxed{\textbf{47}}$ Найдите значение выражения

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}.$$

$\boxed{\textbf{48}}$ Найдите значение выражения

$$\frac{4\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{7-\sqrt{40}}-\sqrt{7+\sqrt{40}}}.$$

$\boxed{\textbf{49}}$ Найдите значение выражения $\sqrt{a+2-2\sqrt{a+1}}$ при $a=-0{,}03$.

$\boxed{\textbf{50}}$ Найдите значение выражения $a^2+\dfrac{1}{a^2}$, если $a-\dfrac{1}{a}=7$.

$\boxed{\textbf{51}}$ Найдите значение выражения $a^4+\dfrac{1}{a^4}$, если известно, что

$$a\ -\ \frac{1}{a}\ =\ \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

$\boxed{\textbf{52}}$ Известно, что $a+b+c=12$ и $ab+bc+ca=-15$. Найдите $a^2+b^2+c^2$.

$\boxed{\textbf{53}}$ Разложите многочлен x^4+64 на множители.

$\boxed{\textbf{54}}$ Докажите, что $2022^{2023}-2019^{2023}$ делится на 3.

$\boxed{\textbf{55}}$ Докажите, что при четном натуральном n разность 9^n-5^n делится на 56.

2. Задачи на проценты

Один процент от числа — это одна сотая часть этого числа. Один процент обозначается 1%. Чтобы найти 17% от числа 25, необходимо вычислить $\frac{17}{100} \cdot 25$:

$$\frac{17}{100} \cdot 25 = \frac{17 \cdot 25}{100} = \frac{425}{100} = 4{,}25.$$

Таким образом, 17% от числа 25 составляют 4,25.

Примером обратной задачи к задаче нахождения процента от числа является следующая задача: известно, что 45% некоторого числа равны 12. Найдите это число. Обозначив искомое число буквой X и используя определение процента, запишем $\frac{45}{100} \cdot X = 12$.

Тогда $\frac{45 \cdot X}{100} = 12$, откуда $45 \cdot X = 12 \cdot 100$, $X = \frac{1200}{45}$, $X = 26\frac{2}{3}$.

Доля числа X в числе Y — это отношение $\frac{X}{Y}$. Данная величина не имеет размерности. Она показывает, какую часть от числа Y составляет число X. Если мы хотим выразить долю в процентах, то нужно умножить отношение $\frac{X}{Y}$ на 100%.

Пример 1. Товар стоил 1200 руб. Его цена сначала повысилась на 10%, затем еще на 15%, после чего снизилась на 5%. Сколько теперь стоит этот товар? Ответ дайте в рублях.

Решение. Первоначальная цена товара 1200 руб. Если она повышается на 10%, то новая цена станет равной

$$1200 + \frac{10}{100} \cdot 1200 = 1320.$$

Далее новая цена повышается на 15%:

$$1320 + \frac{15}{100} \cdot 1320 = 1518.$$

Теперь эта цена уменьшается на 5%:

$$1518 - \frac{5}{100} \cdot 1518 = 1442{,}1.$$

Ответ: 1442,1.

Пример 2. Цена на электрический чайник была повышена на 16% и составила 3480 руб. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

Решение. Пусть X — первоначальная цена чайника. Далее, 16% от числа X — это $\frac{16}{100} \cdot X$. Увеличение первоначальной цены на 16% означает, что новая цена равна

$$X + \frac{16}{100} \cdot X = 3480.$$

Далее остается решить это уравнение:

$$X\left(1 + \frac{16}{100}\right) = 3480, \quad X\left(1 + \frac{4}{25}\right) = 3480, \quad X \cdot \frac{29}{25} = 3480,$$

$$X \cdot 29 = 3480 \cdot 25, \quad X = \frac{3480 \cdot 25}{29}, \quad X = 3000.$$

Ответ: 3000.

Пример 3. В связи с повышением разряда рабочий стал вместо 4800 руб. получать 6000 руб. На сколько процентов повысилась зарплата рабочего?

Решение. Пусть $X > Y$. Если мы хотим сказать, на сколько процентов число X больше, чем число Y, то вычисляем значение следующего выражения:

$$\frac{X - Y}{Y} \cdot 100\%.$$

Если мы хотим сказать, на сколько процентов число Y меньше, чем число X, то

$$\frac{X - Y}{X} \cdot 100\%.$$

Мы делим разность на то, с чем сравниваем.

В этой задаче нас спрашивают, на сколько процентов 6000 больше, чем 4800, на сколько процентов рабочий получает больше, чем он получал ранее:

$$\frac{6000 - 4800}{4800} \cdot 100\% = 25\%.$$

Ответ: 25.

Задачи для самостоятельного решения

$\boxed{1}$ В июне брюки в магазине стоили 2600 руб. В июле их стоимость увеличилась на 20%, а в августе — еще на 20%. Сколько рублей в результате стоят брюки?

$\boxed{2}$ Число увеличили на 10%, а затем уменьшили на 60%. Получили 11. Найдите число.

$\boxed{3}$ Стоимость товара вместе с доставкой составляет 3942 руб., причем стоимость доставки составляет 8% от стоимости самого товара. Определите, сколько рублей стоит товар без доставки.

$\boxed{4}$ Ноутбук стоил 32 000 руб. После повышения цены он стал стоить 40 000 руб. На сколько процентов была повышена цена?

$\boxed{5}$ Есть 300 граммов 20%-го раствора соли. Сколько граммов воды нужно добавить, чтобы получить 8%-й раствор?

$\boxed{6}$ Стипендия Маши составляет 80% от стипендии Нади. Сколько процентов от стипендии Маши составляет стипендия Нади?

$\boxed{7}$ Оптовая цена учебника равна 170 руб. Розничная цена на 20% выше оптовой. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по розничной цене на 7000 руб.?

$\boxed{8}$ Пирожок стоит 12 руб. При покупке более 20 пирожков продавец делает скидку в размере 5% от стоимости всей покупки. Покупатель купил 30 пирожков. Сколько рублей он заплатил за покупку?

$\boxed{9}$ Свитер при распродаже уценили на 40%, при этом он стал стоить 990 руб. Сколько рублей стоил свитер до распродажи?

$\boxed{10}$ В коробке синие и красные шары. Известно, что количество красных шаров составляет 40% от количества синих. 30% красных шаров заменили на синие. Сколько процентов от общего числа шаров составляют теперь красные шары?

$\boxed{11}$ Цена товара выросла на 5%, затем понизилась на 20%, затем вновь выросла на 15%. На сколько процентов в итоге изменилась цена товара?

$\boxed{12}$ Крышка на 20% дешевле сковородки. Сковородка подорожала на 5%, цена крышки при этом не изменилась. На сколько процентов подорожал комплект «сковородка с крышкой»?

$\boxed{13}$ Турист прошел 70% пути, а затем 10% оставшегося пути. После этого ему еще осталось пройти 5 км 400 м. Сколько километров уже прошел турист?

$\boxed{14}$ Книга на 70% дороже календаря. Цена книги увеличилась на 10%, а общая стоимость книги и календаря уменьшилась на 5%. На сколько процентов снизилась цена календаря?

$\boxed{15}$ За первый день турист прошел 30% всего пути, а за третий — 60% пути, пройденного за первые два дня вместе. Сколько процентов всего пути прошел турист за второй день, если известно, что за три дня он преодолел весь путь?

$\boxed{16}$ Скорость автомобиля на первой половине пути на 20% больше его скорости на второй половине пути. На сколько процентов скорость автомобиля на второй половине пути меньше средней скорости автомобиля на всем пути? Ответ округлите до целых.

$\boxed{17}$ В прямоугольном треугольнике один катет на 25% меньше другого. Сколько процентов гипотенузы составляет периметр треугольника?

3. Текстовые задачи

Задачи на движение

Когда мы говорим о равномерном движении по прямой, то прежде всего мы подразумеваем, что скорость движущегося объекта (v), время его движения (t) и пройденное им расстояние (s) связаны формулой

$$s = v \cdot t,$$

из которой вытекают еще два соотношения

$$v = \frac{s}{t}, \quad t = \frac{s}{v}.$$

Если два объекта находятся на расстоянии s друг от друга, а затем одновременно начинают двигаться навстречу друг другу, то время, через которое они встретятся, находится по формуле

$$t = \frac{s}{v_1 + v_2},$$

где v_1 и v_2 — скорости их движения.

Предположим теперь, что эти объекты движутся в одну сторону и $v_1 > v_2$. Тогда время, через которое первый догонит второго, находится по формуле

$$t = \frac{s}{v_1 - v_2}.$$

Пример 1. Скорость велосипедиста на 36 км/ч меньше скорости мотоциклиста. Расстояние от города до поселка велосипедист проезжает за 6 ч, а мотоциклист — за 2 ч. Какова скорость велосипедиста? Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть x км/ч — скорость велосипедиста, тогда $x + 36$ км/ч — скорость мотоциклиста. Поскольку велосипедист находится в пути 6 ч, то преодолеваемое им расстояние составит $6x$ км. Поскольку мотоциклист находится в пути 2 ч, то расстояние составит $2(x + 36)$ км.

Удобнее, конечно, все эти рассуждения записывать в привычной всем таблице:

	v	t	s
Велосипедист	x	6	$6x$
Мотоциклист	$x + 36$	2	$2(x + 36)$

Из условия задачи следует, что велосипедист и мотоциклист проделали один и тот же путь, то есть

$$6x = 2(x + 36),$$

откуда $x = 18$.

Ответ: 18.

Пример 2. Два автомобиля отправляются в 420-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость автомобиля, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть x км/ч — скорость второго автомобиля. Тогда $x+10$ км/ч — скорость первого автомобиля. Поскольку оба автомобиля проезжают 420 км, то мы можем выразить время их движения:

$\dfrac{420}{x + 10}$ ч — время движения первого автомобиля,

$\dfrac{420}{x}$ ч — время движения второго автомобиля.

Снова составим таблицу:

	v	t	s
Первый автомобиль	$x+10$	$\dfrac{420}{x+10}$	420
Второй автомобиль	x	$\dfrac{420}{x}$	420

Время движения второго автомобиля больше на 1 ч, поэтому

$$\frac{420}{x} - \frac{420}{x+10} = 1,$$

$$\frac{420(x+10) - 420x}{x(x+10)} = 1,$$

$$\frac{4200}{x(x+10)} = 1,$$

$$\begin{cases} x(x+10) = 4200, \\ x(x+10) \neq 0. \end{cases}$$

Корнями уравнения $x^2 + 10x - 4200 = 0$ являются числа $x_1 = 60$ и $x_2 = -70$. Заметим, что $x_1 = 60$ и $x_2 = -70$ удовлетворяют условию $x(x+10) \neq 0$, но $x_2 = -70$ не подходит по смыслу задачи.

Ответ: 60.

Пример 3. Расстояние между пунктами A и B составляет 435 км. Из A в B со скоростью 60 км/ч выехал первый атомобиль, а через 1 ч после этого навстречу ему из B выехал со скоростью 65 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от пункта A произойдет встреча автомобилей? Ответ дайте в км.

Решение. За 1 ч первый автомобиль проехал 60 км. Перед выездом из B второго автомобиля расстояние между ними было $435 - 60 = 375$ км. Пусть x — время, через которое встретились автомобили после выезда второго автомобиля.

	v	t	s
Первый автомобиль	60	x	$60x$
Второй автомобиль	65	x	$65x$

Тогда $60x + 65x = 375$, $125x = 375$, $x = 3$. Следовательно, первый автомобиль с момента отправления из A находился в пути 4 ч, за которые он проехал $60 \cdot 4 = 240$ км.

Ответ: 240.

Задачи на работу

Решение задач этого типа во многом схоже с решением задач на движение, поскольку основные понятия: производительность (p), время (t) и работа (A), подчинены соотношению

$$A = p \cdot t,$$

из которого следуют формулы

$$p = \frac{A}{t}, \quad t = \frac{A}{p}.$$

Ниже мы приведем примеры задач на работу, сюжеты которых аналогичны сюжетам задач на движение. Более того, мы переформулируем тексты рассмотренных выше задач.

Скорость велосипедиста на 36 км/ч меньше скорости мотоциклиста. Расстояние от города до поселка велосипедист проезжает за 6 ч, а мотоциклист — за 2 ч. Какова скорость велосипедиста?	Ученик мастера изготавливает в час на 36 деталей меньше мастера. Ученик выполнил за 6 ч работу, на которую мастеру понадобилось 2 ч. Какова производительность ученика?

Производительность можно понимать как скорость работы, а саму работу — как путь, который проходит работник до желаемого результата. Вспомним задачу про велосипедиста и мотоциклиста. Можно сформулировать подобную задачу на работу.

Решение тоже будет подобным, если не сказать больше — под копирку, поскольку математическая модель задачи по сути такая же. Для решения обозначим через x производительность (скорость работы) ученика и т.д. Заметим, что здесь скорость измеряется в деталях в час.

Далее

Два автомобиля отправляются в 420-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость автомобиля, пришедшего к финишу вторым.	Две трубы наполняют водой емкость объемом 420 л. Через первую трубу в емкость поступает на 10 л в час воды больше, чем через вторую. Первая труба наполняет емкость на 1 ч быстрее, чем вторая. Сколько литров воды поступает через вторую трубу в час?

Пусть x — скорость наполнения емкости второй трубой... Решение такое же. Однако в этой задаче можно поставить и второй вопрос: за сколько времени наполнят емкость две трубы, работая одновременно?

Наконец третья задача.

Расстояние между городами Архангельск и Воскресенск равно 435 км. Из Архангельска в Воскресенск со скоростью 60 км/ч выезжает первый грузовик, а через час после этого навстречу ему из Воскресенска выехал со скоростью 65 км/ч второй грузовик. На каком расстоянии от Архангельска грузовики встретятся?	Два мастера должны изготовить 435 деталей. Первый мастер делает 60 деталей в час, а второй — 65 деталей в час. Второй мастер приступил к работе на час позже первого. Сколько деталей изготовит первый мастер к тому моменту, когда все детали будут сделаны?

Задачи на смеси, сплавы, растворы

Концентрация вещества в смеси (сплаве, растворе) — это величина, вычисляемая по формуле

$$p = \frac{m}{M} \cdot 100\%,$$

где m — масса вещества в смеси (сплаве, растворе); M — масса всей смеси (сплава, раствора).

Иногда в задачах на смеси, сплавы, растворы фигурируют не массы веществ, а их объемы. Концентрация в этом случае выражается аналогичной формулой

$$p = \frac{v}{V} \cdot 100\%,$$

где v — объем вещества в смеси (сплаве, растворе); V — объем всей смеси (сплава, раствора).

В решении задач этого типа мы полагаем, что при слиянии нескольких смесей, сплавов или растворов масса и объем полученной смеси, сплава или раствора равны сумме масс и объемов смешиваемых компонентов соответственно.

Пример 1. Наталия смешала 5 л раствора, содержащего 20% кислоты, 3 л раствора, содержащего 40% той же кислоты. Найдите концентрацию кислоты в полученном Наталией растворе.

Решение. Объем чистой кислоты в первом растворе составляет $5 \cdot 0{,}2 = 1$ л, при этом объем чистой кислоты во втором растворе составляет $3 \cdot 0{,}4 = 1{,}2$ л. Следовательно, объем чистой кислоты в новом растворе равен $1 + 1{,}2 = 2{,}2$ л.

Объем нового раствора равен $5 + 3 = 8$ л. Тогда концентрация кислоты в новом растворе

$$p = \frac{2{,}2}{8} \cdot 100\% = 27{,}5\%.$$

Ответ: 27,5.

Пример 2. Газ в первом сосуде содержал 15% кислорода, а газ во втором сосуде — 10% кислорода. Известно, что масса газа в первом сосуде была меньше массы газа во втором сосуде на 100 г. Газы перемешали в третьем сосуде. Полученный третий газ содержит 12% кислорода. Найдите массу третьего газа. Ответ дайте в граммах.

Решение. Пусть x — масса первого газа (в граммах). Тогда $x + 100$ — масса второго газа. Поэтому масса кислорода в первом газе равна $0{,}15x$ г, а масса кислорода во втором газе равна $0{,}1(x+100)$. Масса третьего газа равна $x+x+100 = 2x+100$. Поскольку третий газ содержит 12% кислорода, то

$$\frac{0{,}15x + 0{,}1(x + 100)}{2x + 100} = 0{,}12,$$

$$0{,}25x + 10 = 0{,}12 \cdot (2x + 100),\ \ 0{,}25x + 10 = 0{,}24x + 12,$$

$$0{,}01x = 2,\ \ x = 200.$$

Следовательно, масса третьего газа равна $2 \cdot 200 + 100 = 500$.

Ответ: 500.

Учебное издание

Серия Хочу в лицей!

Материалы для подготовки к вступительным экзаменам по математике в 10-й класс Лицея НИУ ВШЭ

Второе издание

Гиляровская Анна Викторовна, Рудько Юлия Сергеевна,
Салимова Альфия Фаизовна, Смирнова Ольга Викторовна

Зав. книжной редакцией Е.А. Бережнова
Редактор А.Ф. Салимова
Компьютерная верстка: А.Ф. Салимова
Корректор Т.Г. Паркани
Дизайн обложки: И.В. Ветров

Все новости издательства — http://id.hse.ru

По вопросам закупки книг обращайтесь в отдел реализации
Тел.: +7 495 772-95-90 доб. 15295, 15296, 15297

Подписано в печать 21.11.2025. Формат 60 × 90 1/8. Гарнитура Computer Modern
Усл. печ. л. 12,75. Уч-изд. л. 4,7
Тираж 1000 экз. Изд. № 3037

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, Москва, ул. Мясницкая, 20,
тел.: +7 495 772-95-90 доб. 15285

Отпечатано ООО «Фотоэксперт»
109316, Москва, Волгоградский проспект, д. 42