

НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ВЫСШАЯ ШКОЛА
ЭКОНОМИКИ

ЛИЦЕЙ

Хочу в Лицей!

МАТЕМАТИКА

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ВСТУПИТЕЛЬНЫМ ЭКЗАМЕНАМ ПО МАТЕМАТИКЕ

в 10-й класс
Лицея НИУ ВШЭ

А.В. Гиляровская
Ю.С. Рудько
А.Ф. Салимова
О.В. Смирнова



Издательский дом
Высшей школы экономики
МОСКВА, 2024

УДК 51(075)
ББК 22.1я7
М34



<https://elibrary.ru/cvdpex>

Учебное пособие рекомендовано к изданию
Педагогическим советом Лицея НИУ ВШЭ

Пособие подготовлено сотрудниками кафедры математики Лицея НИУ ВШЭ

Общая редакция: А.Ф. Салимова

Материалы для подготовки к вступительным экзаменам по математике в 10-й класс Лицея НИУ ВШЭ / А. В. Гиляровская, Ю. С. Рудько, А. Ф. Салимова, О. В. Смирнова ; под общ. ред. А. Ф. Салимовой ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики», Лицей НИУ ВШЭ. — М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2024. — 102 с. — (Хочу в Лицей!). — 1000 экз. — ISBN 978-5-7598-2971-3 (в обл.). — ISBN 978-5-7598-4033-6 (e-book).

Настоящее пособие предназначено для учащихся 9-х классов, которые планируют поступать в 10-й класс Лицея НИУ ВШЭ. В пособии приведены демоварианты первого и второго этапов вступительных испытаний в 10-й класс Лицея НИУ ВШЭ, разборы заданий из этих вариантов, описаны критерии оценивания. Представлены варианты для самостоятельной подготовки к первому и второму этапам вступительных испытаний в 10-й класс.

УДК 51(075)
ББК 22.1я7

Опубликовано Издательским домом Высшей школы экономики
<http://id.hse.ru>

doi:10.17323/978-5-7598-2971-3

ISBN 978-5-7598-2971-3 (в обл.)
ISBN 978-5-7598-4033-6 (e-book)

© Гиляровская А.В., Рудько Ю.С., Салимова А.Ф.,
Смирнова О.В., 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Литература, рекомендуемая для подготовки	5
Структура вступительного экзамена по математике в 10-й класс	6
Вступительные испытания 1-го этапа в 10-й класс 2023 г.	7
Решение заданий по математике 1-го этапа вступительных испытаний 2023 г.	10
Вступительные испытания 1-го этапа в 10-й класс 2024 г.	19
Вступительные испытания 2-го этапа в 10-й класс 2024 г.	20
Решение заданий по математике 2-го этапа вступительных испытаний 2024 г.	22
Задания для подготовки	28
1. Тождественные преобразования и вычисления	28
Задачи для самостоятельного решения	32
2. Задачи на проценты	37
Задачи для самостоятельного решения	39
3. Текстовые задачи	40
Задачи для самостоятельного решения	44
4. Линейная функция	46
Задачи для самостоятельного решения	48
5. Уравнения и неравенства	51
6. Прогрессии	55
Задачи для самостоятельного решения	56
7. Задачи с параметром, задачи на координатной плоскости и прямой	58
Задачи для самостоятельного решения	69
8. Основные факты школьной планиметрии	74
9. Задачи по геометрии из 1-го этапа вступительных испытаний	80
Примеры вступительных испытаний	83
Варианты задач по математике 1-го этапа вступительных испытаний	
в 10-й класс	83
Вариант 1	83
Вариант 2	84
Вариант 3	85
Вариант 4	86
Вариант 5	87
Вариант 6	88
Вариант 7	89
Вариант 8	90
Вариант 9	91
Варианты задач по математике 2-го этапа вступительных испытаний	
в 10-й класс	92
Вариант 1	92
Вариант 2	93
Вариант 3	94
Вариант 4	95
Вариант 5	96
Вариант 6	97
Вариант 7	98
Примерные задания устного собеседования в 10-й класс	99

ПРЕДИСЛОВИЕ

Авторы данного пособия ставили своей целью помочь абитуриентам, поступающим в 10-й класс Лицея НИУ ВШЭ. Пособие содержит разбор демонстрационных вариантов и задания для самостоятельной подготовки. Часть этих заданий была взята из вариантов прошлых лет. В целом сборник дает понять ожидаемый уровень освоения математики абитуриентами.

Для поступления в Лицей НИУ ВШЭ всем абитуриентам необходимо успешно справиться с задачами по математике 1-го этапа вступительных испытаний. Поступающим на направления «Математика», «Информатика, инженерия и математика» и «Экономика и математика» необходимо продемонстрировать хороший уровень владения математикой в решении задач 2-го этапа вступительных испытаний. Задания для самостоятельного решения содержат задачи для подготовки к обоим этапам вступительных испытаний. Авторы уверены, что владение алгоритмами решения представленных здесь задач может служить хорошим дополнением к глубокому и основательному изучению курса школьной математики.

Выражаем нашу благодарность и признательность В.П. Барашеву, Б.В. Галицкому, В.Н. Деменко, О.А. Евсеевой, А.Б. Зубову, Е.М. Ивениной, А.В. Красинцу, И.А. Миткевич, О.В. Охтеменко, Д.С. Чистякову, Н.А. Шабат, А.В. Цареву, И.Х. Ямалиеву за помощь в подготовке этого пособия, бесценные идеи, замечания и поддержку.

*С пожеланиями успехов,
авторы настоящего пособия*

ЛИТЕРАТУРА, РЕКОМЕНДУЕМАЯ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ

1. Алгебра. 9-й класс: учебник / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. 14-е изд., стер. М.: Просвещение, 2023.
2. Алгебра. 9-й класс: учебник / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир; под ред. В.Е. Подольского. 8-е изд., стер. М.: Просвещение, 2023.
3. Алгебра. 9-й класс. Углубленный уровень: учебник / А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков; под ред. В.Е. Подольского. 8-е изд. М.: Просвещение, 2023.
4. Математика. Геометрия. 7–9-й классы. Базовый уровень: учебник / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. 14-е изд., перераб. М.: Просвещение, 2023.
5. Геометрия. 9-й класс: учебник / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир; под ред. В.Е. Подольского. 8-е изд. М.: Просвещение, 2023.
6. Геометрия. 9-й класс. Углубленный уровень: учебник / А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков; под ред. В.Е. Подольского. 6-е изд., стер. М.: Просвещение, 2023.
7. Геометрия. 9-й класс: учебник / В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, В.В. Прасолов; под ред. В.А. Садовниченко. 8-е изд., стер. М.: Просвещение, 2022.
8. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра. М.: Физматлит, 2007.
9. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. М.: Физматлит, 2007.
10. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре: учеб. пособие для 8–9-го классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 2001.
11. Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9-й классы. М.: МЦНМО, 2004.
12. Иванов О.А. Практикум по элементарной математике: Алгебро-аналитические методы: учеб. пособие. М.: МЦНМО, 2001.
13. Кравцев С.В., Макаров Ю.Л., Максимов М.И. и др. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных. М.: Экзамен, 2001.
14. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: справочник. М.: Факториал, 1997.
15. Олехник С.Н., Потапов М.К., Нестеренко Ю.В. Конкурсные задачи по математике: справочное пособие. 3-е изд., стер. М.: Физматлит, 2003.
16. Сергеев И.Н. Математика: задачи с ответами и решениями. М.: КДУ, 2013.
17. Хорошилова Е.В. Элементарная математика: учеб. пособие для старшеклассников и абитуриентов. Часть 1. М.: МГУ, 2020.
18. Хорошилова Е.В. Элементарная математика: учеб. пособие для старшеклассников и абитуриентов. Часть 2. М.: МГУ, 2020.

СТРУКТУРА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ В 10-Й КЛАСС

Вступительные испытания 1-го этапа проходят все абитуриенты, поступающие в 10-й класс Лицея НИУ ВШЭ. Работа представляет собой тест и состоит из 10 заданий с открытым ответом.

Ответом является целое число или конечная десятичная дробь с 1–2 знаками после запятой. Проверка ответов осуществляется с помощью информационных технологий.

Задания оцениваются по шкале, приведенной в таблице:

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество баллов	0,5	1	1	1	1	1	1	1	1	1,5

Вступительные испытания 2-го этапа выполняют только поступающие на направления «Математика», «Информатика, инженерия и математика» и «Экономика и математика» Лицея НИУ ВШЭ. Она состоит из пяти заданий с развернутым ответом. Проверка решений осуществляется по критериям, устанавливаемым приемной комиссией Лицея НИУ ВШЭ.

Задания оцениваются по шкале, приведенной в таблице:

Номер задания	1	2	3	4	5
Количество баллов	3	3	4	5	5

Темы для подготовки: числа и вычисления (натуральные, целые, рациональные, действительные числа); алгебраические выражения (буквенные выражения, многочлены, алгебраические дроби); уравнения и неравенства (линейные, квадратные уравнения и неравенства с одной переменной и их системы); решение текстовых задач; числовые последовательности (арифметическая и геометрическая прогрессии, сложные проценты); функции, линейная функция, квадратичная функция, обратная пропорциональность, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = |x|$, их свойства и графики, решение уравнений и неравенств с использованием графиков функций; геометрические фигуры и их свойства (треугольники, многоугольники, окружность и круг); треугольники, элементы треугольника, медианы, высоты, биссектрисы треугольника и их свойства; равенство и подобие треугольников; прямоугольный треугольник и его свойства; параллельные прямые, их признаки и свойства; теорема Чевы, теорема Менелая; четырехугольники и их свойства; параллелограмм, трапеция; теорема синусов, теорема косинусов; площади фигур; окружность и ее свойства; вписанные и центральные углы; хорда, секущая и касательная окружности; взаимное расположение двух окружностей; вписанные и описанные окружности и их свойства.

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ИСПЫТАНИЯ 1-ГО ЭТАПА В 10-Й КЛАСС

ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ 2023 ДЕМО
Выполните задания (10 баллов)

1 (0,5 балла) Вычислите: $58 \cdot \left(\left(2\frac{1}{14} \right)^{-2} - \left(1\frac{14}{15} \right)^{-2} \right)$.

ИЛИ

Найдите значение выражения $(-6t)$, если $t = \frac{11}{6} : (2,65 : 2,5 - 1,1)$.

2 (1 балл) Решите уравнение

$$\frac{7}{x^2 + 3x - 4} - \frac{3x + 6}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{1 - x}.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите наименьший из них.

ИЛИ

Решите неравенство

$$\left(\sqrt{x + 2} + 1 \right) \cdot (7,3x - 20) \leq 0.$$

В ответе укажите количество целых чисел, являющихся решениями неравенства.

3 (1 балл) В параллелограмме $MFKT$ угол T равен 135° , а диагональ FT перпендикулярна стороне FK , которая равна 14. Найдите площадь параллелограмма $MFKT$.

ИЛИ

Треугольник MPK равнобедренный. Известно, что MK — основание, угол при котором равен 75° . Найдите длину стороны MP , если высота, проведенная к этой стороне, равна 18.

4 (1 балл) Ежемесячный доход семьи равен 95 000 руб., причем 40% этой суммы составляет заработная плата Татьяны. В результате кризиса ее заработная плата снизилась на 10%. На сколько процентов снизился общий доход семьи, если доходы остальных членов семьи не изменились?

ИЛИ

Динара и Карим состязались в беге на 1 км. Динара обогнала Карима на 90 с, но если бы Карим бежал в 1,5 раза быстрее, то он обогнал бы Динару на 1 мин. С какой скоростью бежала Динара? Ответ дайте в км/ч.

5 (1 балл) Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые при делении на 3 дают остаток 1, а при делении на 4 — остаток 2.

ИЛИ

Миша начал читать книгу. Каждый день он читал в 2 раза меньше страниц, чем в предыдущий, и прочитал книгу за 6 дней. Сколько страниц книги прочитал Миша за третий день, если в книге 189 страниц?

6 (1 балл) Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции

$$f(x) = \sqrt{9 - x \cdot |x|} + \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 3}{10x^2 - 11x - 62}}.$$

или

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 2 + \frac{1}{x+2}$ при условии, что аргумент принимает значения из области определения функции $g(x) = \sqrt{(x+5)(x+2)} + \sqrt{x+1}$.

7 (1 балл) Найдите значение выражения

$$\sqrt{18}(\sqrt{x} - 3)\sqrt{2x + 18 + 12\sqrt{x}} - 6x$$

при $x = 0,15$.

или

Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{3}a - (1 + 3\sqrt{3})\sqrt{ab} + 3b}{\sqrt{a + 9b - 6\sqrt{ab}}} - \sqrt{b}$ при $a = 27, b = 5$.

8 (1 балл) Замените все буквы цифрами (одинаковые буквы — одинаковыми цифрами, разные буквы — разными), чтобы разность

ЛИЦЕЙ — ОГОНЬ

приняла наибольшее возможное значение. В ответе укажите это значение.

или

В конкурсе по поеданию булочек участвовало 5 человек. Все они съели разное количество булочек, и каждому удалось съесть хотя бы одну. Когда каждого участника спросили, сколько булочек в сумме было съедено за время конкурса, они назвали различные числа от 11 до 15, причем известно, что занявший первое место ошибся на 1, занявший второе место — на 2, третье — на 3, четвертое — на 4, пятое — на 5 булочек. Сколько булочек съел победитель конкурса?

9 (1 балл) Окружность радиуса 3,5 вписана в треугольник KLT и касается сторон KT и KL соответственно в точках A и B . Известно, что $TA : AK = 1 : 2, KB : BL = 2 : 3$. Найдите наибольшую сторону треугольника KLT .

или

В треугольнике PKT известны стороны: $PK = 12, PT = 15, KT = 18$. Проведена биссектриса PF . Окружность, описанная около треугольника PKF , пересекает сторону PT в точке M . Найдите периметр треугольника MFT .

10 (1,5 балла) Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\frac{ax^2 + x - a - 1}{\sqrt{1-x}} = 0$$

не имеет решений. В ответ запишите разность между наибольшим и наименьшим из таких значений.

ИЛИ

Найдите значение параметра a , при котором расстояние между точками, заданными на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} y^2 - 4x + x^2 = 0, \\ 2y + ax - 3 = 0, \end{cases}$$

будет наибольшим.

1 (0,5 балла) Вычислите: $58 \cdot \left(\left(2\frac{1}{14} \right)^{-2} - \left(1\frac{14}{15} \right)^{-2} \right)$.

Решение. Запишем смешанные дроби в скобках в виде неправильных дробей:

$$\left(2\frac{1}{14} \right)^{-2} = \left(\frac{14}{29} \right)^2, \quad \left(1\frac{14}{15} \right)^{-2} = \left(\frac{15}{29} \right)^2.$$

По формуле разности квадратов

$$\left(\frac{14}{29} \right)^2 - \left(\frac{15}{29} \right)^2 = \left(\frac{14}{29} - \frac{15}{29} \right) \cdot \left(\frac{14}{29} + \frac{15}{29} \right) = -\frac{1}{29}.$$

Умножая это число на 58, получим в итоге -2 .

Ответ: -2 .

ИЛИ

Найдите значение выражения $(-6t)$, если $t = \frac{11}{6} : (2,65 : 2,5 - 1,1)$.

Решение. Сначала найдем значение выражения, стоящего в скобках:

$$2,65 : 2,5 - 1,1 = 265 : 250 - 1,1 = 1,06 - 1,1 = -0,04 = -\frac{1}{25}.$$

Далее выполним деление:

$$\frac{11}{6} : \left(-\frac{1}{25} \right) = -\frac{11 \cdot 25}{6}.$$

Тогда $-6t = 11 \cdot 25 = 275$.

Ответ: 275.

2 (1 балл) Решите уравнение

$$\frac{7}{x^2 + 3x - 4} - \frac{3x + 6}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{1 - x}.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите наименьший из них.

Решение. Заметим, что

$$x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4), \quad x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2).$$

Тогда

$$\frac{7}{(x - 1)(x + 4)} - \frac{3x + 6}{(x - 1)(x + 2)} = -\frac{1}{x - 1}.$$

Далее

$$\begin{cases} \frac{7}{x + 4} - \frac{3x + 6}{x + 2} = -1, \\ x \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq -2, \\ x \neq -4, \\ \frac{7}{x+4} - 3 = -1. \end{cases}$$

Данная система имеет единственное решение $x = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $-0,5$.

ИЛИ

Решите неравенство

$$(\sqrt{x+2} + 1) \cdot (7,3x - 20) \leq 0.$$

В ответе укажите количество целых чисел, являющихся решениями неравенства.

Решение. На области допустимых значений $[-2; +\infty)$ имеем

$$\sqrt{x+2} + 1 \geq 1.$$

Разделим неравенство на $\sqrt{x+2} + 1$, получим

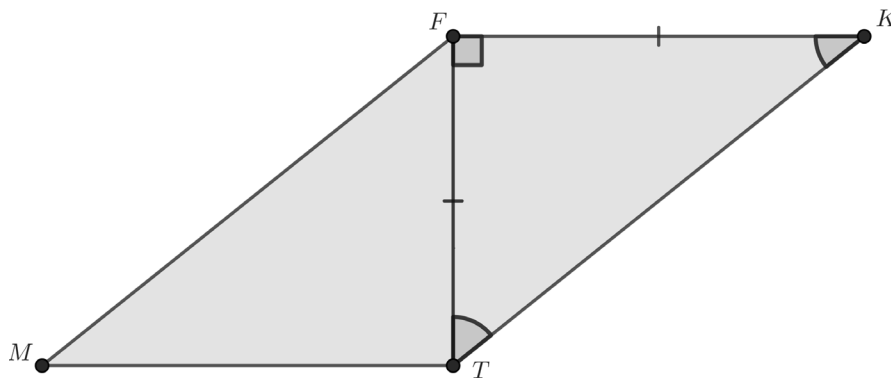
$$7,3x - 20 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2\frac{54}{73}.$$

Пересечем множество полученных значений x с условием $x \geq -2$. Таким образом, решениями неравенства являются числа из промежутка $[-2; 2\frac{54}{73}]$. В этом промежутке 5 целых чисел.

Ответ: 5.

3 (1 балл) В параллелограмме $MFKT$ угол T равен 135° , а диагональ FT перпендикулярна стороне FK , которая равна 14. Найдите площадь параллелограмма $MFKT$.

Решение.



Если $\angle MTK = 135^\circ$, то $\angle FKT = 45^\circ$. Тогда $\angle FTK = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Значит, треугольник FTK равнобедренный и $FT = FK = 14$.

Отрезок FT является высотой параллелограмма.

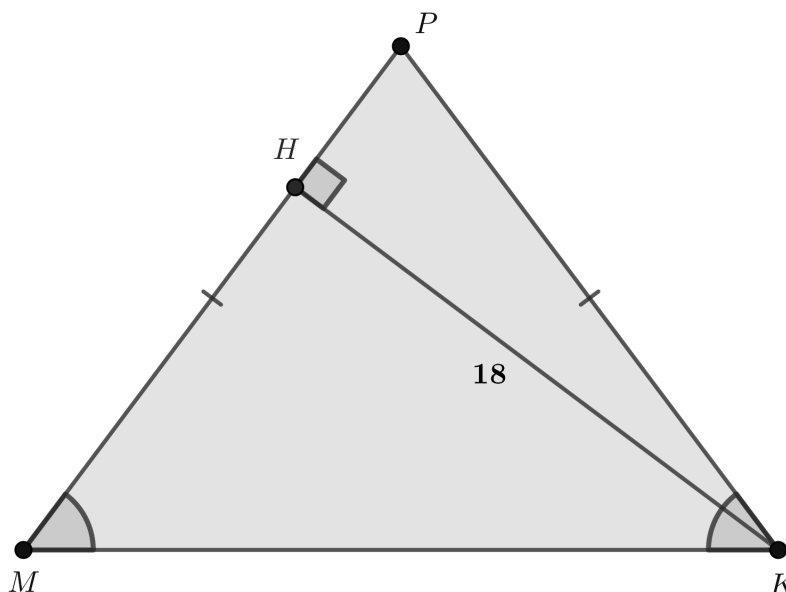
Получим $S_{MFKT} = FT \cdot FK = 14^2 = 196$.

Ответ: 196.

ИЛИ

Треугольник MPK — равнобедренный. Известно, что MK — основание, угол при котором равен 75° . Найдите длину стороны MP , если высота, проведенная к этой стороне, равна 18.

Решение.



Так как треугольник MPK равнобедренный, то

$$\angle MPK = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ.$$

Проведем высоту KH . В прямоугольном треугольнике PHK катет KH лежит против угла в 30° , значит, $PM = PK = 2 \cdot 18 = 36$.

Ответ: 36.

4 (1 балл) Ежемесячный доход семьи равен 95 000 руб. Известно, что 40% этой суммы составляет заработная плата Татьяны. В результате кризиса ее заработная плата снизилась на 10%. На сколько процентов снизился общий доход семьи, если доходы остальных членов семьи не изменились?

Решение. Зарботная плата Татьяны составляет $95\,000 \cdot 0,4 = 38\,000$ руб. Изменение ее заработной платы составит $38\,000 \cdot 0,1 = 3800$ руб. На эту же величину изменится доход семьи. Он снизится на $\frac{3800}{95\,000} \cdot 100\% = 4\%$.

Ответ: 4.

ИЛИ

Динара и Карим состязались в беге на 1 км. Динара обогнала Карима на 90 с, но если бы Карим бежал в 1,5 раза быстрее, то он обогнал бы Динару на 1 мин. С какой скоростью бежала Динара? Ответ дайте в км/ч.

Решение. Пусть x — скорость Динары, y — скорость Карима в км/мин. Тогда

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}.$$

Если Карим будет бежать в 1,5 раза быстрее, его скорость составит $1,5y$. Значит:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{1,5y} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{2}{3y} = 1.$$

Сложим полученные уравнения:

$$\frac{1}{y} - \frac{2}{3y} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{15}{2}.$$

Тогда $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} - \frac{3}{2} = 6 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$ км/мин.

Выразим скорость в км/ч: $\frac{1}{6}$ км/мин составляет 10 км/ч.

Ответ: 10.

5 (1 балл) Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые при делении на 3 дают остаток 1, а при делении на 4 — остаток 2.

Решение. Обозначим через A число, удовлетворяющее условию задачи. Тогда

$$A = 3k + 1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (A - 1) : 3.$$

С другой стороны, по условию задачи число A при делении на 4 дает остаток 2, значит, это число можно представить в виде

$$A = 4p + 2, p \in \mathbb{Z} \Rightarrow (A - 2) : 4.$$

Тогда

$$(A + 2) : 12 \Rightarrow A = 12l - 2 = 12(l - 1) + 10 = 12s + 10, \quad l, s \in \mathbb{Z}.$$

Значит, нужно найти сумму трехзначных чисел, которые при делении на 12 будут давать остаток 10.

Определим их количество:

$$100 \leq 12s + 10 \leq 999 \Rightarrow 8 \leq s \leq 82.$$

Тогда всего подходящих чисел 75.

Эти числа образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 12$ и первым членом $a_1 = 106$, который получается при $s = 8$. Найдём сумму прогрессии:

$$S = \frac{2 \cdot 106 + 74 \cdot 12}{2} \cdot 75 = 41\,250.$$

Ответ: 41 250.

ИЛИ

Миша начал читать книгу. Каждый день он читал в 2 раза меньше страниц, чем в предыдущий, и прочитал книгу за 6 дней. Сколько страниц книги прочитал Миша за третий день, если в книге 189 страниц?

Решение. Числа, равные количеству страниц, которое Миша читал каждый день, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2}$. Пусть x — количество страниц, прочитанных в первый день. Тогда по формуле суммы геометрической прогрессии получим

$$189 = \frac{x \cdot (0,5^6 - 1)}{0,5 - 1} \Rightarrow x = \frac{189 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{64}} = 96.$$

Тогда в третий день Миша прочитал $96 \cdot \frac{1}{4} = 24$ страницы.

Ответ: 24.

6 (1 балл) Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции

$$f(x) = \sqrt{9 - x \cdot |x|} + \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 3}{10x^2 - 11x - 62}}.$$

Решение. Так как $\sqrt{5} - 3 < 0$, то второе слагаемое существует при условии

$$10x^2 - 11x - 62 < 0, \quad \text{откуда} \quad x \in \left(-2; \frac{31}{10}\right).$$

Первое слагаемое существует при условии $9 - x \cdot |x| \geq 0$. Рассмотрим два случая.

При $x \geq 0$ имеем $9 - x^2 \geq 0$, откуда $x \in [-3; 3]$. Пересечем с полученным условием для второго слагаемого, получим $x \in [0; 3]$.

При $x < 0$ получим неравенство $9 + x^2 \geq 0$, которое справедливо при всех x . В пересечении с условием для второго слагаемого получим $x \in (-2; 0)$.

Теперь объединим два полученных множества. Итак, $f(x)$ определена на промежутке $(-2; 3]$. Запишем целые числа из этого множества: $-1; 0; 1; 2; 3$. Сумма целых решений равна 5.

Ответ: 5.

ИЛИ

Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 2 + \frac{1}{x+2}$ при условии, что аргумент принимает значения из области определения функции $g(x) = \sqrt{(x+5)(x+2)} + \sqrt{x+1}$.

Решение. Графиком функции $f(x)$ является гипербола, $x = -2$ — вертикальная асимптота, $y = 2$ — горизонтальная асимптота. Найдем область определения функции $g(x)$:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ (x + 5)(x + 2) \geq 0. \end{cases}$$

Получим, что $x \geq -1$. На этом промежутке функция $f(x)$ убывает. Значит, свое наибольшее значение на указанном промежутке она принимает в самой левой точке промежутка, т.е. при $x = -1$. Тогда наибольшее значение равно $f(-1) = 3$.

Ответ: 3.

7 (1 балл) Найдите значение выражения

$$\sqrt{18}(\sqrt{x} - 3) \sqrt{2x + 18 + 12\sqrt{x}} - 6x$$

при $x = 0,15$.

Решение. Заметим, что

$$2x + 18 + 12\sqrt{x} = 2(\sqrt{x} + 3)^2.$$

Так как \sqrt{x} принимает неотрицательные значения при всех допустимых x , то

$$\sqrt{2(\sqrt{x} + 3)^2} = \sqrt{2} \cdot |\sqrt{x} + 3| = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{x} + 3).$$

Тогда при $x \geq 0$ имеем

$$\sqrt{18}(\sqrt{x} - 3) \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{x} + 3) - 6x = 6x - 54 - 6x = -54.$$

Ответ: -54 .

ИЛИ

Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{3a} - (1 + 3\sqrt{3})\sqrt{ab} + 3b}{\sqrt{a + 9b - 6\sqrt{ab}}} - \sqrt{b}$ при $a = 27, b = 5$.

Решение. При $a \geq 0, b \geq 0$ выражение в числителе дроби можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sqrt{3a} - (1 + 3\sqrt{3})\sqrt{ab} + 3b = \sqrt{3a} - \sqrt{ab} - 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{ab} + 3b = \\ & = \sqrt{a}(\sqrt{3a} - \sqrt{b}) - 3\sqrt{b}(\sqrt{3a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{3a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - 3\sqrt{b}). \end{aligned}$$

Выражение в знаменателе можно представить в виде квадрата разности:

$$a + 9b - 6\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - 3\sqrt{b})^2.$$

Так как $a = 27, b = 5$, то $\sqrt{a} - 3\sqrt{b} = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{5} < 0$, поэтому

$$\sqrt{(\sqrt{a} - 3\sqrt{b})^2} = |\sqrt{a} - 3\sqrt{b}| = 3\sqrt{b} - \sqrt{a}.$$

Тогда частное равно

$$\frac{(\sqrt{3a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} - 3\sqrt{b})}{-(\sqrt{a} - 3\sqrt{b})} = -\sqrt{3a} + \sqrt{b}.$$

Подставив данные числовые значения буквенных переменных, найдем значение исходного выражения: $-\sqrt{3a} + \sqrt{b} - \sqrt{b} = -\sqrt{3a} = -\sqrt{27 \cdot 3} = -9$.

Ответ: -9 .

8 (1 балл) Замените все буквы цифрами (одинаковые буквы — одинаковыми цифрами, разные буквы — разными), чтобы разность

ЛИЦЕЙ — ОГОНЬ

приняла наибольшее возможное значение. В ответе укажите это значение.

Решение. Чем больше уменьшаемое, тем больше разность. Наибольшее пятизначное число с различными цифрами — это 98765.

Определим наименьшее возможное значение вычитаемого. На первую позицию нельзя поставить 0, поэтому $O = 1$. Все остальные цифры различны, значит, самое маленькое возможное вычитаемое равно 10123.

Тогда разность равна 88642.

Ответ: 88642.

ИЛИ

В конкурсе по поеданию булочек участвовало 5 человек. Все они съели разное количество булочек, и каждому удалось съесть хотя бы одну. Когда каждого участника спросили, сколько булочек в сумме было съедено за время конкурса, они назвали различные числа от 11 до 15, причем известно, что занявший первое место ошибся на 1, занявший второе место — на 2, третье — на 3, четвертое — на 4, пятое — на 5 булочек. Сколько булочек съел победитель конкурса?

Решение. Количество булочек, которое могли съесть участники конкурса, не меньше чем $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Тогда меньше всего ошибся участник, назвавший число 15. Именно он занял первое место. Значит, всего было съедено 16 булочек.

Так как все участники съели различное количество булочек и каждый съел хотя бы одну, то победитель не мог съесть меньше 5 булочек.

Если победитель съел 5 булочек, то всего было съедено 15. Если он съел 6 булочек, то всего их могло быть 16: $16 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6$. Если победитель съел 7 и более булочек, то минимальная сумма не меньше числа $7 + 1 + 2 + 3 + 4 = 17 > 16$.

Ответ: 6.

9 (1 балл) Окружность радиуса 3,5 вписана в треугольник KLT и касается сторон KT и KL соответственно в точках A и B . Известно, что $TA : AK = 1 : 2$, $KB : BL = 2 : 3$. Найдите наибольшую сторону треугольника KLT .

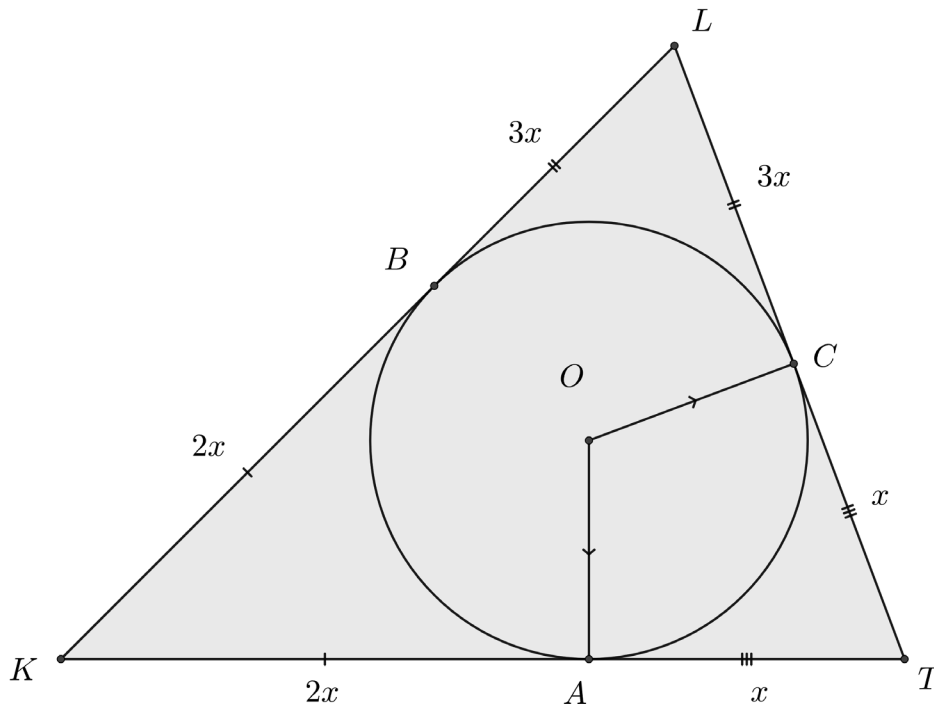
Решение. Выполним чертеж. Точку, в которой окружность касается стороны TL , обозначим C .

Пусть $AK = 2x$, $AT = x$ и $BK = 2y$, $BL = 3y$.

Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны, поэтому

$$BK = AK \Rightarrow x = y.$$

Так как $BL = CL$, $AT = CT$, то $KT = 3x$, $KL = 5x$, $TL = 4x$.



Заметим, что для сторон треугольника KLT выполняется соотношение

$$KL^2 = KT^2 + LT^2,$$

значит, это прямоугольный треугольник и $\angle KTL = 90^\circ$.

Пусть O — центр вписанной окружности.

Тогда $OA \perp TK$, $OC \perp LT$ (радиусы, проведенные в точки касания). Значит, $OATC$ — прямоугольник. Так как $OC = OA$, то четырехугольник $OATC$ — квадрат.

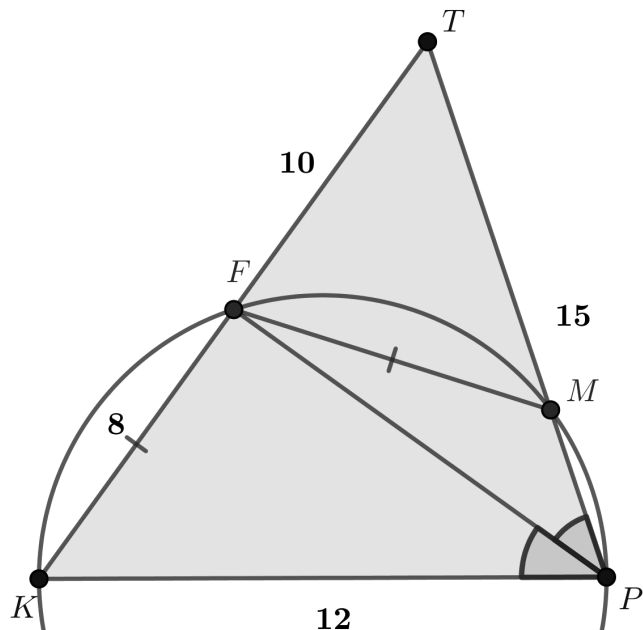
Получили, что $OA = 3,5 = x \Rightarrow KL = 5x = 17,5$.

Ответ: 17,5.

ИЛИ

В треугольнике PKT известны стороны: $PK = 12$, $PT = 15$, $KT = 18$. Проведена биссектриса PF . Окружность, описанная около треугольника PKF , пересекает сторону PT в точке M . Найдите периметр треугольника MFT .

Решение. Выполним чертеж.



По свойству биссектрисы имеем

$$\frac{KF}{FT} = \frac{KP}{TP} = \frac{4}{5}.$$

Из равенства $KT = KF + FT = 18$ следует, что $KF = 8$, $FT = 10$.

По теореме об отрезках секущих, проведенных из одной точки, имеем:

$$FT \cdot KT = MT \cdot PT \Rightarrow MT = 12.$$

Вписанные углы KPF и MPF равны, поэтому они опираются на равные хорды. Тогда $FM = 8$. Откуда $P_{MFT} = 10 + 8 + 12 = 30$.

Ответ: 30.

10 (1,5 балла) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{ax^2 + x - a - 1}{\sqrt{1-x}} = 0$$

не имеет решений. В ответ запишите разность между наибольшим и наименьшим значениями таких a .

Решение. Если $a = 0$, то $x = 1$ — корень числителя. Однако в этой точке знаменатель обращается в нуль. Уравнение не имеет решений при $a = 0$.

При любом $a \neq 0$ уравнение $ax^2 + x - a - 1 = 0$ имеет корни, так как

$$D = 1 + 4a^2 + 4a = (2a + 1)^2 \geq 0.$$

Тогда $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{a+1}{a}$. Чтобы исходное уравнение не имело решений, необходимо, чтобы $-\frac{a+1}{a} \geq 1$. Откуда $a \in [-0,5; 0)$.

Таким образом, $a \in [-0,5; 0]$. Найдём разность между наибольшим и наименьшим значениями: $0 - (-0,5) = 0,5$.

Ответ: 0,5.

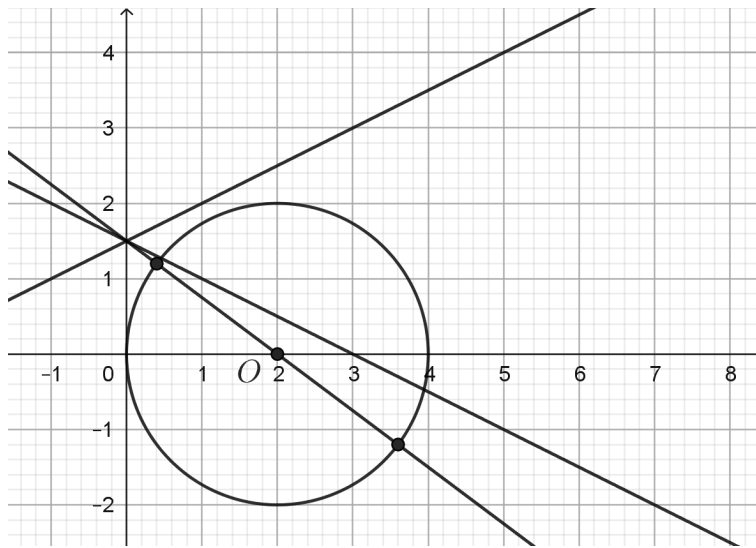
ИЛИ

Найдите значение параметра a , при котором расстояние между точками, заданными на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} y^2 - 4x + x^2 = 0, \\ 2y + ax - 3 = 0, \end{cases}$$

будет наибольшим.

Решение. Первое уравнение системы на координатной плоскости определяет окружность $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ с центром в точке $(2, 0)$ и радиусом 2. Второе уравнение задает пучок прямых (кроме вертикальной) $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}$, проходящих через точку с координатами $(0; \frac{3}{2})$.



Решения системы — координаты общих точек окружности и прямой. Расстояние между точками будет наибольшим, если точки будут лежать на диаметре окружности, значит, прямая $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3}{2}$ должна проходить через центр окружности. Подставим координаты центра окружности в уравнение прямой, получим:

$$0 = -a + \frac{3}{2} \Rightarrow a = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ИСПЫТАНИЯ 1-ГО ЭТАПА В 10-Й КЛАСС

ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ 2024 ДЕМО Выполните задания (10 баллов)

1 (0,5 балла) Найдите значение выражения $12,8 \cdot 0,25 \cdot \left(\frac{3}{8} - 1\right)$.

Ответ: -2 .

2 (1 балл) Решите уравнение

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 8} = 2.$$

Ответ: 5.

3 (1 балл) Периметр ромба равен 52, а одна из его диагоналей равна 10. Найдите площадь ромба.

Ответ: 120.

4 (1 балл) Три круассана на 30% дороже двух круассанов и стакана кофе. Найдите цену круассана, если стакан кофе стоит 40 руб. Ответ дайте в рублях.

Ответ: 130.

5 (1 балл) Таня вязала платок. Сумма петель в 1-м и 10-м рядах оказалась равной 482. Сколько петель в 11-м ряду, если в каждом ряду Таня делала на 2 петли меньше, чем в предыдущем?

Ответ: 230.

6 (1 балл) Укажите сумму целых значений аргумента, входящих в область определения функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{28 - 3x - x^2}}{(|x| - 4)(x + 9)}.$$

Ответ: -18 .

7 (1 балл) Найдите значение выражения

$$\frac{a\sqrt{a} - 1}{(\sqrt{a} - 1)^2 + 3\sqrt{a}} \cdot (\sqrt{a} + 1)$$

при $a = 2,7$.

Ответ: 1,7.

8 (1 балл) Миша, Коля и Вася вместе выполняют некоторую работу за 4 дня. Миша и Коля вдвоем выполняют эту работу за 6 дней, а Миша и Вася — за 8 дней. Во сколько раз производительность Коли выше производительности Васи?

Ответ: 1,5.

9 (1 балл) В треугольнике ABC , площадь которого равна 68, проведены высота BH и медиана AM . Расстояние между точками H и M равно 8. Найдите расстояние от точки A до прямой BC .

Ответ: 8,5.

10 (1,5 балла) На доске написано пятизначное число, в котором все цифры различны и нечетны. Если поменять местами первую и последнюю цифры числа, то оно будет делиться на 25, а если вычеркнуть вторую цифру числа, то оно будет делиться на 3. Какое число написано на доске, если известно, что оно оканчивается не на 9?

Ответ: 51973.

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ИСПЫТАНИЯ 2-ГО ЭТАПА В 10-Й КЛАСС

ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ 2024 ДЕМО
ДЛЯ НАПРАВЛЕНИЙ «ИНФОРМАТИКА, ИНЖЕНЕРИЯ И МАТЕМАТИКА»,
«ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИКА», «МАТЕМАТИКА»
Выполните задания (20 баллов)

1 (3 балла) Решите неравенство

$$\frac{25 + 30x - 54x^2}{\sqrt{1 - x^6}} \geq 0.$$

или

Найдите все значения переменной x , при которых выражение

$$\frac{\sqrt{3 + x - |-x - 3|}}{\sqrt{x^2 - 6x + 7} - \sqrt{7 - x}}$$

не имеет смысла.

2 (3 балла) Натуральное число называется палиндромом, если его десятичная запись одинаково читается слева направо и справа налево. Например, 12 321, 12 344 321 – палиндромы. Найдите все четырехзначные палиндромы, делящиеся на 15.

или

Мотоциклисты Айрат и Виталий ездят по круговой трассе по часовой стрелке, причем скорость Айрата больше скорости Виталия на 30 км/ч. В какой-то момент, одновременно проезжая мимо плаката «Жми на газ!», они оба увеличили свою скорость на 20 км/ч. В следующий раз после этого Айрат обогнал Виталия возле того же плаката, проехав с момента ускорения ровно 4 круга. Найдите скорости мотоциклистов до того, как они решили ускориться.

3 (4 балла) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Продолжения стороны CD за точку C и стороны AB за точку B пересекаются в точке N . Площадь треугольника ABD равна 2, площадь треугольника ABC равна 1, $AB = BN$. Диагонали BD и AC пересекаются в точке O .

- Докажите, что BC – средняя линия треугольника AND .
- Найдите OD , если $BO = 0,5$.

или

Высота трапеции $ABCD$ равна 7. Известны длины оснований трапеции: $AD = 10$, $BC = 8$. Через точку E , лежащую на стороне CD , проведена прямая BE , которая пересекает диагональ AC в точке O так, что $AO : OC = 5 : 2$.

- Докажите, что $CE : CD = 4 : 9$.
- Найдите площадь треугольника OEC .

4 (5 баллов) На координатной плоскости Oxy фигура задана системой неравенств

$$\begin{cases} (|x| - 4)(y - x + 8) \leq 0, \\ y^2 + x^2 \leq 8|x|. \end{cases}$$

Изобразите эту фигуру и вычислите ее площадь.

ИЛИ

Дана функция $f(x) = |x + 2| + |2x - 6| - 8$. Изобразите на координатной плоскости графики функций $y = f(x)$ и $y = 7 - |x - t|$, где t — наименьшее значение функции $f(x)$. Вычислите площадь многоугольника, ограниченного данными графиками.

5 (5 баллов) Найдите все такие значения параметра a , для каждого из которых множество решений уравнения

$$\frac{\sqrt{x^2 + 2ax + a^2} + \sqrt{x^2 - 6ax + 9a^2} - 4a}{\sqrt{4 - x^2}} = 0$$

есть отрезок.

ИЛИ

При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^2 - 4a^2}{|x| + 2a} + \frac{x}{\sqrt{x^2}} + \frac{(\sqrt{x - a})^2}{x - a} = 0$$

имеет решения? В ответе укажите полученные значения a и соответствующие им решения.

Учебное издание

Серия Хочу в лицей!

**Материалы для подготовки к вступительным экзаменам
по математике в 10-й класс Лицея НИУ ВШЭ**

Гиляровская Анна Викторовна, Рудько Юлия Сергеевна,
Салимова Альфия Фаизовна, Смирнова Ольга Владимировна

Зав. книжной редакцией Е.А. Бережнова
Редактор А.Ф. Салимова
Компьютерная верстка: А.Ф. Салимова
Корректор Т.Г. Паркани
Дизайн обложки: И.В. Ветров

Подписано в печать 19.01.2024. Формат 60 × 90 1/8. Гарнитура Computer Modern
Усл. печ. л. 12,75. Уч-изд. л. 4,7
Тираж 1000 экз. Изд. № 2818

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, Москва, ул. Мясницкая, 20
тел.: (495) 772-95-90 доб. 15285

Отпечатано ООО «Фотоэксперт»
109316, Москва, Волгоградский проспект, д. 42