Г.И. Левиев
М.Р. Трунин

Учебное пособие
Второе издание, пересмотренное

Физика: научись решать задачи сам

Издательский дом
Высшей школы экономики
МОСКВА, 2023

УДК 53(075.3)
ББК 22.3
Л36

https://elibrary.ru/yidpwn

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, профессор базовой кафедры физики конденсированных сред при Институте физики твердого тела им. Ю.А. Осипьяна РАН факультета физики НИУ ВШЭ, чл.-корр. РАН *В.Д. Кулаковский*;

д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой общей физики МФТИ *А.В. Максимычев*

Л36 **Левиев, Г. И., Трунин, М. Р.** Физика: научись решать задачи сам [Текст] : учебное пособие / Г. И. Левиев, М. Р. Трунин ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». — 2-е изд., пересмотр. — М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2023. — 688 с. — 600 экз. — ISBN 978-5-7598-2775-7 (в пер.). — ISBN 978-5-7598-2843-3 (e-book).

Учебное пособие представляет собой сборник оригинальных задач, составленный в полном соответствии с учебной программой школьного курса физики. Особенность издания — в процедуре решения задач, развивающей у школьников способность самостоятельно думать. Большая часть задач составлена на основе реальных наблюдений и ситуаций, что позволяет ученику легко представить себе условие. Первая часть пособия содержит основные формулы и определения по темам, условия задач и указания к их решению, в которых разбирается «физика» задачи и обсуждаются необходимые для решения формулы из краткой сводки в начале главы. Такое «почти самостоятельное» решение задач особенно полезно в начале подготовки, когда школьнику нужно преодолеть неуверенность в собственных силах. По мере его вовлечения в предметный тематический блок сложность и разнообразие задач повышаются, вплоть до высшего уровня физико-технических разработок, отмеченных недавними Нобелевскими премиями. Во второй части пособия приведен подробный разбор каждой задачи.

Издание ориентировано на целенаправленную подготовку к выпускному единому государственному экзамену (ЕГЭ) в школе и дополнительному вступительному испытанию (ДВИ) при поступлении в вуз инженерно-физического профиля. Оно может быть интересно и для преподавателей, поскольку содержит указания на некоторые неточности в известных задачниках по физике для школы.

УДК 53(075.3)
ББК 22.3

Опубликовано Издательским домом Высшей школы экономики
http://id.hse.ru

doi:10.17323/978-5-7598-2775-7

ISBN 978-5-7598-2775-7 (в пер.)
ISBN 978-5-7598-2843-3 (e-book)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие «Физика: научись решать задачи сам» ориентировано на целенаправленную подготовку к Единому государственному экзамену (ЕГЭ) по физике в школе и дополнительному вступительному испытанию (ДВИ) при поступлении на физический факультет некоторых университетов. Серьезная самостоятельная работа с пособием позволит школьнику не только набрать высокие баллы на ЕГЭ и поступить в желаемый университет, но и плавно перейти к изучению там современного курса физики.

Ежегодно около 15–17% выпускников школ сдают ЕГЭ по физике. Встает вопрос о наиболее эффективной технологии подготовки к ЕГЭ и ДВИ в условиях ограниченного времени. Сегодня имеются рынок репетиторов, множество пособий для подготовки к ЕГЭ по физике, есть сайты в Интернете, где приведены тысячи задач с решениями. Это, безусловно, полезные ресурсы, и их можно использовать в процессе подготовки. Но как научиться самому решать задачи? Ведь умение самостоятельно работать и принимать обдуманные решения — ценное качество, обладатели которого обычно и достигают карьерного успеха. Взявшись за данное пособие, у вас появляется возможность преодолеть неуверенность в собственных силах и научиться быстро решать задачи, в том числе непростые, если следовать предложенной в пособии траектории решения.

Первая часть состоит из пяти глав, включающих 18 тематических блоков, которые охватывают все разделы школьного курса физики. Каждая глава начинается краткой сводкой основных формул и определений, используемых при решении задач по теме. Нумерация формул и определений соответствует порядку следования тем в блоках данной главы. В каждом тематическом блоке содержится несколько десятков стандартных и оригинальных задач, взятых из реальных ситуаций, что позволяет школьнику легко представить себе условие задачи. После каждой задачи приводится только численный ответ. Если этот ответ сразу не получается, нужно заглянуть в раздел «Указания к решению задач», который находится в конце каждой главы. В нем к каждой задаче разбирается физическая ситуация и приводится ссылка на необходимые для ее решения формулы в начале главы (например, «использовать 2-й закон Ньютона в импульсной форме (1.1.4.2)). Таким образом, сначала вы пробуете понять сюжет и физический смысл задачи, потом выстраиваете логику ее решения и переводите эту последовательность мысленных действий на математический язык, ну и в конечном итоге получаете ответ. Если он не сходится с приведенным ответом, сравните ход своих рассуждений и вычислений с предлагаемыми в указании. Такое «почти самостоятельное» решение задач особенно полезно в начале подготовки, когда нужно преодолеть неуверенность в собственных силах. Поскольку в нынешних условиях школьник не может позволить себе роскошь обдумывать задачу слишком долго, если за 20–30 мин ему не удалось найти ответ даже с помощью подсказки в указаниях, тогда уже следует заглянуть во вторую часть пособия, где приведены подробные решения всех задач. Для закрепления полезно также отметить номер задачи, вызвавшей затруднения, и вернуться к ней через одну-две недели.

Для преподавателей физики в школе пособие может быть интересно тем, что в нем обращается внимание на некоторые распространенные ошибки в известных задачниках по физике для школы.

* * *

Второе издание учебного пособия «Физика: научись решать задачи сам» пересмотрено и подкорректировано. Сохраняя целенаправленность книги на подготовку к ЕГЭ и учитывая изменения в заданиях ЕГЭ по физике в 2023 г., рекомендуем считать параграфы «Элементы астрофизики» в главе «Квантовая физика и астрофизика» факультативными для тех, кто интересуется астрономией.

Мы благодарны всем читателям, приславшим свои отклики на нашу книгу.

Г.И. Левиев, М.Р. Трунин
Март 2023 г.

ВВЕДЕНИЕ. ВЕКТОРЫ В ФИЗИКЕ

Векторы как удобная система обозначений и правила работы с ними появились в середине XIX в. Основатели физики — Ньютон, Галилей — не использовали векторы.

Для наших целей можно смотреть на векторы как на отрезки со стрелкой на одном конце, правила обращения с которыми придуманы, как придуманы правила игры в шахматы, например, конь ходит буквой «Г». Разница между этими «придумками» в том, что шахматные правила не используются нигде, кроме шахмат, а правила обращения с векторами отражают поведение физических величин — сил, скоростей, напряженностей полей и упрощают описание физической картины.

Вектор характеризуется длиной отрезка (модулем вектора) и направлением. Два вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ считаем равными и записываем $\vec{A} = \vec{B}$, если совпадают их модули $A = B$ и направления. Буква со стрелкой обозначает вектор, а та же буква без стрелки — его модуль, положительное число. На рис. В1 модуль вектора $\vec{C}$ равен модулю вектора $\vec{A}$, т.е. $C = A$. Но это не равные векторы, $\vec{C} \neq \vec{A}$, из-за того, что у них разные направления. Вектор $\vec{D}$ направлен, как вектор $\vec{A}$, но его модуль больше, чем модуль вектора $\vec{A}$, и потому $\vec{D} \neq \vec{A}$. Вектор $\vec{E}$, модуль которого такой же, как у вектора $\vec{A}$, а направление противоположное, считаем связанным с $\vec{A}$ соотношением $\vec{E} = -\vec{A}$.

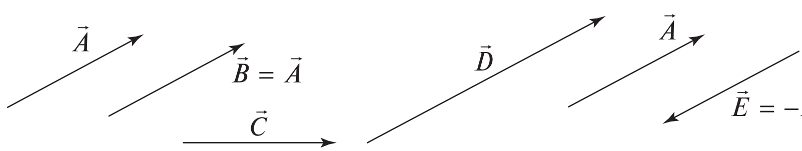

Рис. В1

Сложение векторов

Сформулируем основное правило, благодаря которому векторы находят применение в физике. Вектор $\vec{C}$ называется суммой вектора $\vec{A}$ и вектора $\vec{B}$, $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, если он построен, как на рис. В2, *а* (правило параллелограмма), или, что эквивалентно, как на рис. В2, *б* (правило треугольника).

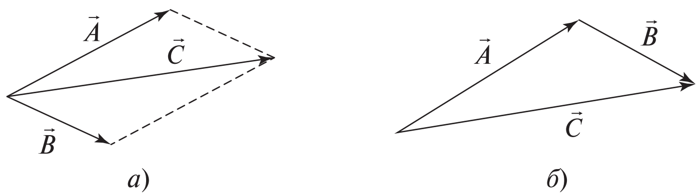

Рис. В2

Вектор $\vec{D}$, равный разности вектора $\vec{A}$ и вектора $\vec{B}$, определяется как сумма вектора $\vec{A}$ и вектора $(-\vec{B})$: $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$. Он находится как вторая диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{A}$ и $\vec{B}$ (рис. В3). Стрелка вектора разности ставится около вектора-уменьшаемого (правило «уколи уменьшаемое»).

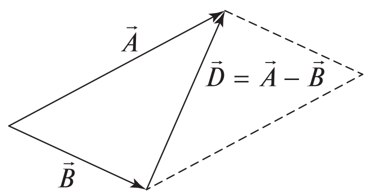

Рис. В3

Приведем пример использования векторов в физике. Два трактора равномерно перемещают по земле контейнер с помощью тросов. Угол между тросами $\alpha = 60°$. В тросах имеются встроенные динамометры, которые показывают натяжения тросов 3 кН и 4 кН соответственно. Спрашивается, можно ли заменить два трактора одним, обеспечив такое же перемещение контейнера? И если можно, то как должен быть ориентирован единственный трос от одного трактора и каково натяжение этого троса? Ответ на поставленные физические вопросы дает эксперимент, который показывает, что «работает» правило сложения векторов. То есть нужно представить силы как векторы, направленные вдоль тросов, с модулями 3 кН и 4 кН. Дальше найти результирующий вектор по правилу сложения векторов, т.е. модуль их суммы, равный длине диагонали параллелограмма, и направление вдоль этой диагонали как направление движения троса. Динамометр, встроенный в этот трос, покажет величину натяжения, соответствующую длине диагонали, — около 6 кН, согласно теореме косинусов.

Этот пример показывает, что правило сложения векторов не только соответствует нашему воображению, как правила игры в шахматы, но и подстроено и подогнано так, чтобы описывать реальные эксперименты. Удивительно, что описание с помощью векторов удобно для разных физических величин — сил, перемещений, скоростей, напряженностей электрического и магнитного полей.

О проекции вектора на ось

Пусть имеются вектор $\vec{A}$ и координатная ось x (рис. В4). Векторы, о которых мы говорим, свободные, т.е. их можно перемещать параллельно самим себе. Переместим вектор $\vec{A}$ так, чтобы его начало оказалось на оси x, и опустим перпендикуляр из конца вектора на ось (рис. В5).

Рис. В4

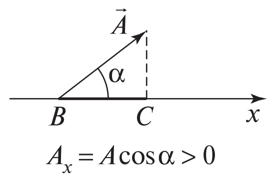

Рис. В5

Проекцией A_x вектора $\vec{A}$ на ось x называют величину $A_x = A\cos\alpha$. Если угол α острый, косинус положительный, величина проекции положительная и равна длине отрезка $BC = A_x$. В случае прямого угла $\alpha = 90°$ проекция вектора на ось обращается в ноль (рис. В6). При углах из интервала $90° < \alpha < 270°$ косинус отрицательный и проекция тоже отрицательная (рис. В7). Во многих задачах приходится брать проекции вектора сразу на две оси, как правило, перпендикулярные друг другу, хотя и не всегда (рис. В8). Иногда удобнее вместо двух проекций, т.е. двух алгебраических чисел, соответствующих данному вектору, представить вектор как сумму двух взаимно перпендикулярных векторов — говорят «разложить вектор на две составляющие».

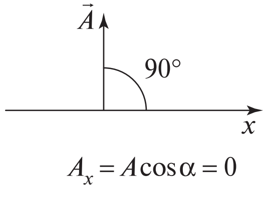

Рис. В6

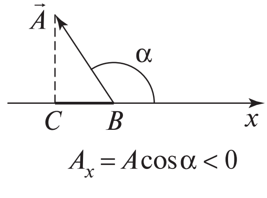

Рис. В7

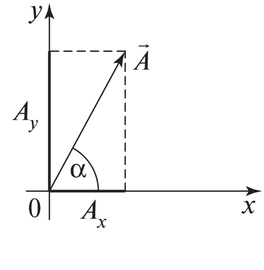

Рис. В8

Например, бывает полезно силу тяжести $m\vec{g}$ тела, лежащего на наклонной плоскости, представить как сумму двух сил: скатывающей силы $\vec{F}_{\text{ск}}$, направленной вдоль наклонной плоскости вниз, и силы нормального давления $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости: $m\vec{g} = \vec{F}_{\text{ск}} + \vec{N}$ (рис. В9).

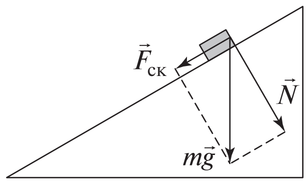

Рис. В9

Умножение векторов

Векторы можно не только складывать и вычитать, но и умножать друг на друга. Мы рассмотрим два способа умножения векторов.

1. **Скалярное произведение векторов.** По определению скалярным произведением двух векторов $\vec{B}$ и $\vec{C}$ называется число A (не вектор, а скаляр), равное произведению модулей векторов B и C и косинуса угла α между векторами:

$$A = \vec{B} \cdot \vec{C} \equiv B \cdot C \cdot \cos\alpha.$$

Из определения видно, что скалярное произведение может быть положительным, отрицательным или равным нулю. В физике с помощью скалярного произведения определяют работу силы. Если при действии на тело постоянной силы $\vec{F}$ оно переместилось на величину $\vec{s}$, то работа A силы при этом перемещении по определению равна $A \equiv Fs\cos\alpha$. Угол α здесь — это угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{s}$.

Скалярное произведение векторов можно выразить не через модули и угол, а через проекции векторов на оси прямоугольной (декартовой) системы координат:

$$A = \vec{B}\vec{C} = BC\cos\alpha = B_xC_x + B_yC_y + B_zC_z.$$

2. **Векторное произведение.** Векторным произведением $\vec{v}$ и $\vec{B}$ называется вектор $\vec{F} = \vec{v} \times \vec{B}$, модуль которого равен произведению модулей v и B и синуса угла α между этими векторами: $F \equiv vB\sin\alpha$. По определению вектор $\vec{F}$ направлен перпендикулярно обоим векторам-сомножителям $\vec{v}$ и $\vec{B}$. При этом, если смотреть со стороны конца вектора-произведения $\vec{F}$,

ближайший поворот от первого сомножителя $\vec{v}$ ко второму сомножителю $\vec{B}$ должен проходить против часовой стрелки (рис. В10).

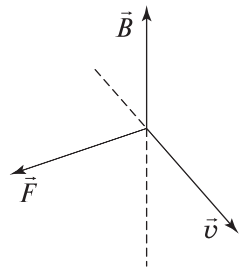

Рис. В10

В физике векторное произведение используется в механике, например, для описания моментов сил и импульсов, в электродинамике, например, для выражения силы Лоренца $\vec{F}_Л = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$. Если при знакомстве с силой Лоренца не используется представление о векторном произведении векторов, то для указания направления силы Лоренца вводят правило левой руки. Любой вектор $\vec{A}$ можно задать с помощью его проекций на заданную систему координатных осей. В общем случае нужно указать три проекции, но если вектор лежит в плоскости, проведенной через оси координат x, y, то для характеристики вектора хватает двух проекций — A_x, A_y.

В некоторых задачах удобно ввести единичные безразмерные векторы, направленные вдоль осей координат, — орты. Стандартные обозначения ортов: $\vec{i}$ для единичного вектора вдоль оси x и $\vec{j}$ для орта, направленного вдоль оси y (рис. В11). Если используется и третья ось координат z, орт вдоль этой оси обозначается $\vec{k}$.

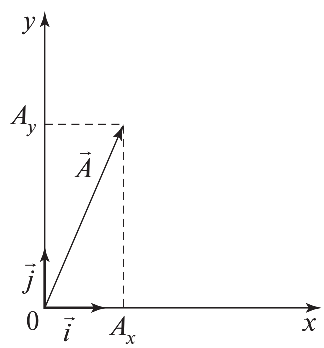

Рис. В11

Произвольные векторы $\vec{A}$, $\vec{B}$ с помощью ортов можно записать так:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j}, \quad \vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j}.$$

Найдем скалярное произведение $\vec{A}\vec{B}$ векторов:

$$\vec{A}\vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j})(B_x\vec{i} + B_y\vec{j}) = A_x\vec{i}B_x\vec{i} + A_x\vec{i}B_y\vec{j} + A_y\vec{j}B_x\vec{i} = A_y\vec{j}B_y\vec{j}. \quad (1)$$

Ответ содержит скалярные произведения ортов $\vec{i}\vec{i}$, $\vec{j}\vec{j}$, $\vec{i}\vec{j}$. Орты перпендикулярны друг другу, поэтому скалярное произведение двух разных ортов равно нулю:

$$\vec{i}\vec{j} = ij\cos 90^\circ = 0. \quad (2)$$

Скалярные «квадраты» ортов, т.е. произведения одинаковых векторов, равны единице:

$$\vec{i}\vec{i} = 1\cdot 1\cdot \cos 0^\circ = 1, \quad \vec{j}\vec{j} = 1\cdot 1\cdot \cos 0^\circ = 1. \quad (3)$$

С учетом (2), (3) для скалярного произведения (1) имеем

$$\vec{A}\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y. \quad (1а)$$

Вывод. Для скалярного произведения векторов получено выражение через проекции векторов (1а). Зная проекции, можно найти скалярное произведение векторов, не рассматривая угол между ними.

Примеры

1. Модули векторов *A*, *B*, *C* на рис. В12 равны 45, 90, 120 соответственно:

а) чему равен модуль вектора $\vec{D}$, равного сумме этих векторов $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$?

б) чему равны углы α и β?

в) чему равно скалярное произведение $\vec{A}\vec{C}$ векторов $\vec{A}$ и $\vec{C}$?

г) чему равен модуль вектора $\vec{F}$, равного векторному произведению $\vec{A}\times\vec{C} = \vec{F}$ векторов $\vec{A}$ и $\vec{C}$?

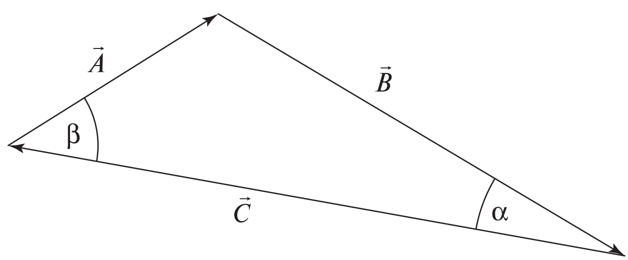

Рис. В12

д) чему равна площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{A}$, $\vec{B}, \vec{C}$?

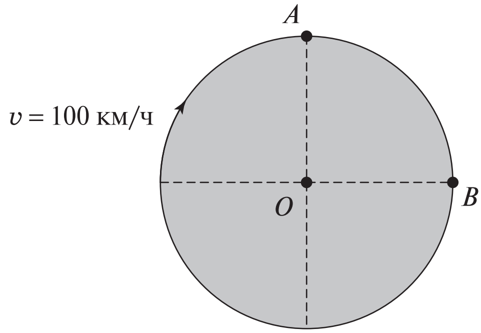

Рис. В13

2. Автомобиль едет по круговой дорожке вокруг стадиона со скоростью $v = 100$ км/ч (рис. В13). Нарисовать вектор разности скоростей $\vec{v}_B - \vec{v}_A$ в точках A и B и вычислить модуль этого вектора.

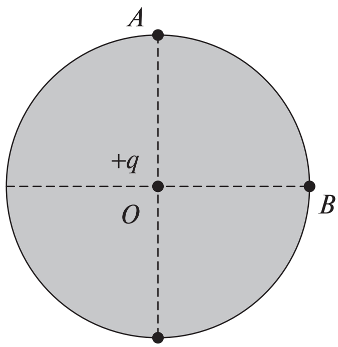

Рис. В14

3. На столе в точке O расположен точечный электрический заряд $+q$ (рис. В14). Нарисовать векторы $\vec{E}_A$, $\vec{E}_B$, $\vec{E}_C$ напряженности поля в точках A, B, C и вектор суммы этих векторов.

4. Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости рисунка от нас (рис. В15). Электрон и альфа-частица влетают в поле с одинаковыми скоростями $\vec{v}$ в плоскости рисунка. Изобразить векторы сил Лоренца, действующих на электрон и на альфа-частицу.

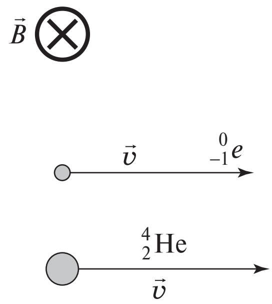

Рис. В15

Часть 1

ЗАДАЧИ И ПОДСКАЗКИ

1. МЕХАНИКА

1.1. Основные формулы и определения

1.1.1. Кинематика

1.1.1.1. *Систему отсчета* образуют тело отсчета, жестко связанная с ним система координатных осей и часы (рис. 1.1).

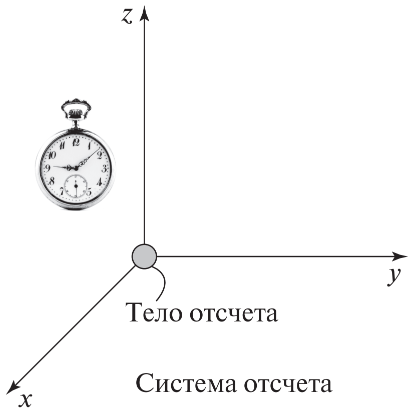

Рис. 1.1

1.1.1.2. Положение тела (материальной точки) в пространстве можно задавать координатами $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, или радиус-вектором $\vec{r}(t)$ (рис. 1.2). Разность $\Delta\vec{r} \equiv \vec{s} \equiv \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ называется *перемещением тела* $\vec{s}$.

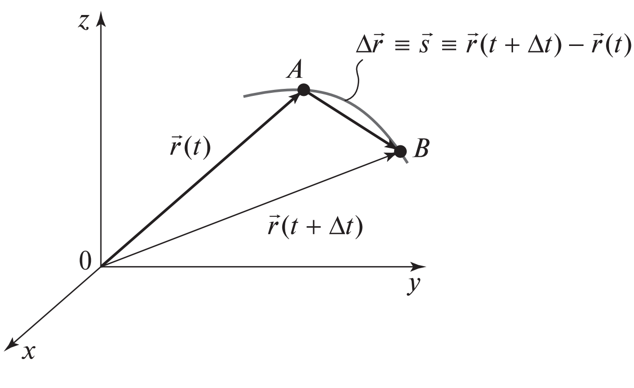

Рис. 1.2

Этой же буквой s часто обозначают *путь тела* — длину пройденного участка траектории. Путь — скалярная положительная величина, со временем может только возрастать или оставаться постоянной, в отличие от модуля вектора перемещения, который может и уменьшаться. Знак тождественности $\equiv$ используется, когда соотношение вводится по определению. *Проекции радиус-вектора тела на оси координат* — это координаты тела $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. При произвольном движении по прямой используется только одна координата, по плоскости — две координаты, в пространстве — три координаты. Зависимость координаты от времени называют *уравнением движения* или *законом движения*. Буквы r, s, v, a без стрелочек над ними означают модули соответствующих векторов, т.е. положительные величины. Проекции векторов могут быть любого знака.

1.1.1.3.

А. *Вектор средней скорости* за промежуток времени Δt:

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Мгновенная скорость в момент времени t:

$$\vec{v}(t) = \left.\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right|_{\Delta t \to 0} \equiv \vec{r}\,'(t).$$

Средняя путевая скорость, скаляр:

$$v_{\text{ср.путевая}} \equiv \frac{s}{t} = \frac{\text{Весь путь}}{\text{Все время}}.$$

Б. *Классический закон сложения скоростей*:

$$\vec{v}(t)_{\text{абс}} = \vec{v}(t)_{\text{пер}} + \vec{v}(t)_{\text{отн}},$$

где $\vec{v}(t)_{\text{абс}}$ — скорость слона относительно неподвижного наблюдателя; $\vec{v}(t)_{\text{отн}}$ — его скорость относительно подвижной системы (автомобиля); $\vec{v}(t)_{\text{пер}}$ (перено́сная) — скорость подвижной системы (рис. 1.3). Три скорости связаны как радиус-векторы.

Подвижная система считается движущейся поступательно. Если подвижная система вращается, то за перено́сную скорость берем скорость той точки подвижной системы, через которую наблюдаемое тело проходит в данный момент времени.

1.1.1.4. *Среднее ускорение* за промежуток времени Δt:

$$\vec{a}_{\text{ср}} \equiv \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t};$$

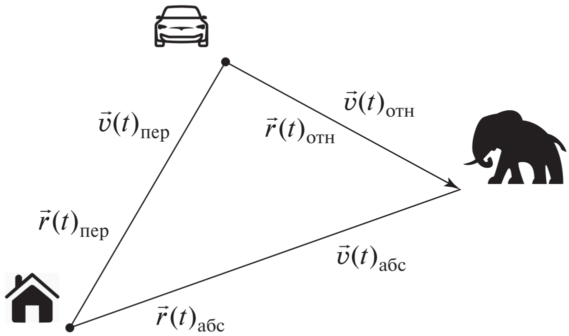

Рис. 1.3

Мгновенное ускорение в момент времени t:

$$\vec{a}(t) \equiv \left.\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right|_{\Delta t\to 0} \equiv \vec{v}'(t).$$

Если ускорение $\vec{a}$ не зависит от времени, для скорости $\vec{v}(t)$ и вектора перемещения $\Delta\vec{r}(t)$ справедливы соотношения

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \quad \Delta\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}, \quad v^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\cdot\Delta\vec{r}.$$

При движении по прямой в одну сторону

$$v^2 - v_0^2 = 2as,$$

где s — пройденный путь.

Сложение ускорений в случае, когда подвижная система движется поступательно:

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{пер}}.$$

Если подвижная система вращается, то связь ускорений более сложная. В таком виде она применима для вращающейся системы в частном случае, когда $\vec{v}_{\text{отн}} = 0$.

1.1.1.5. *Равномерное прямолинейное движение* вдоль оси x:

$$x(t) = x_0 + v_x t, \quad v_x = \text{const}, \quad a_x = 0.$$

1.1.1.6.

А. *Прямолинейное движение с постоянным ускорением* a_x вдоль оси x:

$$x(t) = x_0 + v_{x_0} t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad v_x(t) = v_{x_0} + a_x t,$$

$$v_x^2 - v_{0_x}^2 = 2a_x(x - x_0), \quad v_{x_{ср}} = \frac{v_{1_x} + v_{2x}}{2}.$$

Б. *Произвольное прямолинейное движение* вдоль оси x:

$$x = x(t), \quad v_x(t) = x'(t), \quad a_x(t) = v_x'(t) = x''(t).$$

1.1.1.7.

А. *Движение тела, брошенного вертикально вверх или вниз* с высоты h_0. Ось y направлена вверх, начало на земле:

$$y(t) = h_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \quad v_y(t) = v_{0y} - gt,$$

$$v_y^2(h) - v_y^2(h_0) = 2g(h_0 - h), \quad s_n = g\tau^2\frac{2n-1}{2} = 5\cdot(2n-1).$$

Тело падает без начальной скорости. s_n = (5 м, 15 м, 25 м, 35 м, ...) — путь, пройденный за n-ю секунду, $\tau = 1$ с.

Б. *Движение тела, брошенного со скоростью $\vec{v}_0$ под углом α к горизонту*. Начало системы координат x, y в точке вылета тела:

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}, \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t, \quad x(t) = v_0\cos\alpha\cdot t,$$

$$v_x = v_0\cos\alpha, \quad y(t) = v_0\sin\alpha\cdot t - \frac{\vec{g}t^2}{2}, \quad v_y = v_0\sin\alpha,$$

где $\tau = 2v_0\dfrac{\sin\alpha}{g}$ — время полета тела; $L = v_0^2\dfrac{\sin 2\alpha}{g}$ — дальность полета тела; $H = v_0^2\dfrac{\sin^2\alpha}{2g} = L\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{4}$ — максимальная высота при полете.

Уравнение траектории полета (параболы): $y(x) = x\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$.

Дальность полета тела, брошенного на высоте H:

$$L = v_0^2\frac{\sin 2\alpha}{2g} + v_0\frac{\cos\alpha\sqrt{2gH + v_0^2\sin^2\alpha}}{g}.$$

1.1.1.8. *Движение по окружности.*

Угловая скорость ω тела, движущегося по окружности:

$$\omega \equiv \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

где $\Delta\varphi$ — дуга в радианах, которую проходит тело за промежуток времени Δt.

Связь угловой скорости ω с периодом обращения T и частотой вращения ν:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Связь линейной скорости тела $v_{\text{лин}}$ с угловой скоростью ω (или периодом T) и радиусом окружности R, по которой движется тело:

$$v_{\text{лин}} = \omega R = \frac{2\pi R}{T}.$$

Кинематическая формула центростремительного ускорения $a_{\text{ц}}$ тела, движущегося по дуге окружности радиуса R со скоростью v:

$$a_{\text{ц}} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = v\omega.$$

Формула одинакова для спутника, камня на веревке, электрона в магнитном поле и т.д.

Модуль тангенциального ускорения a_τ:

$$a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

где Δv — изменение модуля скорости тела, движущегося по окружности, за время Δt.

При равномерном движении по окружности тангенциальное ускорение отсутствует.

1.1.1.9. *Движение твердого тела.*

Теорема о проекции Грасгофа. Проекции скоростей двух произвольных точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны между собой (рис. 1.4).

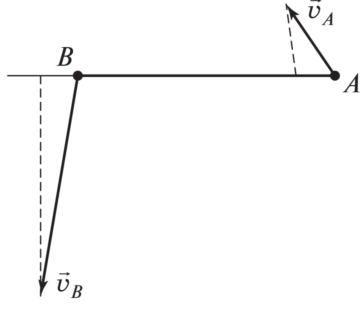

Рис. 1.4

1.1.2. Динамика

1.1.2.1. *Первый закон Ньютона*. Существуют системы отсчета, относительно которых тело, удаленное от всех тел, движется равномерно и прямолинейно.

Такие системы называются инерциальными. Во всех инерциальных системах механические явления протекают одинаково. Это утверждение составляет содержание *принципа относительности Галилея*.

1.1.2.2. Ускорения (модули) взаимодействующих тел обратно пропорциональны их массам:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Выбрав массу одного тела за эталон, можно по ускорениям определить массы других тел.

Отношение массы к объему по определению есть плотность вещества:

$$\frac{m}{V} \equiv \rho.$$

1.1.2.3. *Второй закон Ньютона*. Сила, действующая на тело, движущееся с ускорением:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

1.1.2.4. Если на тело действуют несколько сил, то ускорение определяется их векторной суммой, называемой *равнодействующей силой* $\vec{F}_{\text{р}}$: $m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \vec{F}_{\text{р}}$.

1.1.2.5. *Третий закон Ньютона*. Тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю и противоположными по направлению:

$$\vec{F}_{2\to1} = -\vec{F}_{1\to2}.$$

Согласно Ньютону, такой характер взаимодействия имеет место в любой момент времени.

1.1.2.6. *Закон всемирного тяготения Ньютона*. Два точечных тела (или два шара) притягиваются друг к другу с силой $F_{\text{Н}}$, пропорциональной массам тел и обратно пропорциональной квадрату расстояния R между центрами тел:

$$F_{\text{Н}} = \frac{Gm_1m_2}{R^2}.$$

Коэффициент $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² называется *гравитационной постоянной*, а сама сила притяжения называется *гравитационной силой*.

Гравитационная сила со стороны Земли (и любой планеты) дает основной вклад в силу тяжести $mg = \dfrac{GmM_З}{(R_З + h)^2}$ на любой высоте h. Другой вклад в силу тяжести, обычно намного меньший, дает вращение планеты (центробежная сила).

Закон всемирного тяготения позволяет вывести из динамики *три закона Кеплера*, полученные до его открытия путем наблюдений за планетами.

Первый закон. Планеты движутся по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Второй закон. Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает равные площади.

Третий закон. Квадраты периодов обращений планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их эллиптических орбит.

1.1.2.7. Связь ускорения свободного падения g на поверхности планеты с массой M, плотностью ρ и радиусом R планеты:

$$g = \frac{F_Н}{m} = G\frac{M}{R^2} = G\frac{4}{3}\pi\rho R = G^*\rho R,$$

где $G^* \equiv \dfrac{4}{3}\pi G = 2{,}7939 \cdot 10^{-10}$ Н·м²/кг².

Первая космическая скорость на планете с ускорением свободного падения на поверхности g:

$$v_1 = \sqrt{Rg}.$$

Для Земли $v_{1З} \approx 8$ км/с.

Вторая космическая скорость:

$$v_2 = \sqrt{2Rg}.$$

Для Земли $v_{2З} \approx 11{,}2$ км/с.

1.1.2.8. *Закон Гука.* Сила упругости $F_{упр}$ пропорциональна величине деформации x:

$$F_{упр} = -kx.$$

Коэффициент k, называемый *жесткостью*, зависит от материала тела и его размеров. Для длинного стержня приближенно жесткость пропорциональна площади сечения и обратно пропорциональна длине: $k \propto \dfrac{S}{l}$ ($\propto$ — знак пропорциональности).

Жесткость комбинированной пружины выражается через жесткости отдельных пружин (рис. 1.5):

$k_{пр} = k_1 + k_2$ при «параллельном» соединении пружин;

$\dfrac{1}{k_{пс}} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} \Rightarrow k_{пс} = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ при «последовательном».

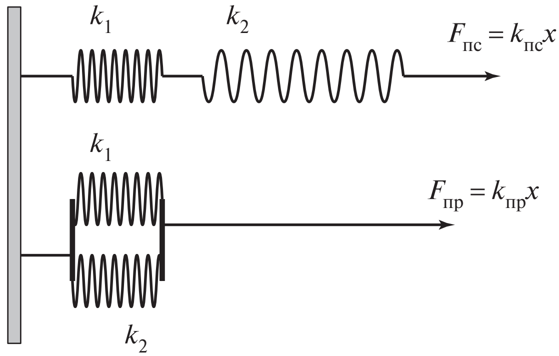

Рис. 1.5

1.1.2.9. Связь силы трения скольжения $F_{тр.ск}$ и силы нормального давления N:

$$F_{тр.ск} = \mu N.$$

Коэффициент трения μ не зависит от скорости скользящего тела.

Сила трения покоя:

$$F_{тр.покоя} \le \mu N,$$

может быть любой в интервале от нуля до силы трения скольжения μN. В этих пределах сила трения покоя подстраивается под внешние силы, стараясь препятствовать скольжению.

1.1.2.10. Давление p при контактном взаимодействии двух тел:

$$p \equiv \frac{N}{S},$$

где N — сила, с которой тела действуют друг на друга по нормали к поверхности контакта; S — площадь поверхности контакта.

Сила, с которой тело давит на опору или растягивает подвес (вес тела) в лифте, движущемся с ускорением a:

$$\vec{N} = m(\vec{g} - \vec{a}).$$

1.1.2.11. На тело, помещенное на наклонную плоскость, действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная реакция плоскости $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Проекции сил на оси x, y (рис. 1.6, *а*):

$$(mg)_x = mg\sin\alpha, \quad (mg)_y = -mg\cos\alpha, \quad F_{\text{тр}x} \le \mu mg\cos\alpha.$$

В некоторых случаях удобно представить силу тяжести в виде двух составляющих (рис. 1.6, *б*):

$$m\vec{g} = \vec{F}_{\text{ск}} + (-\vec{N}), \quad F_{\text{ск}} = mg\sin\alpha, \quad N = mg\cos\alpha,$$

где $\vec{F}_{\text{ск}}$ — скатывающая сила, параллельная наклонной плоскости; $(-\vec{N})$ — сила нормального давления тела на плоскость.

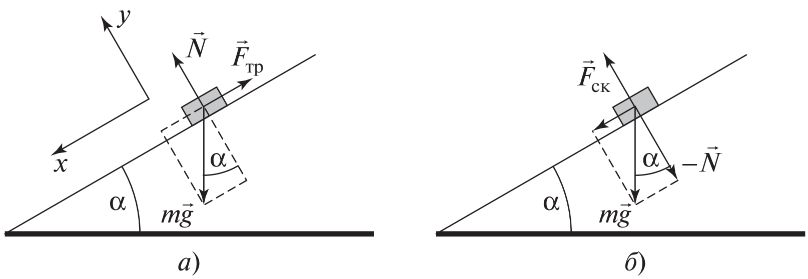

Рис. 1.6

Сила трения на наклонной плоскости:

$$F_{\text{тр}} \le \mu mg\cos\alpha.$$

Если коэффициент трения $m > \operatorname{tg}\alpha$, тело, помещенное на наклонную плоскость, не скользит вниз.

Ускорение тела, скатывающегося вниз по гладкой наклонной плоскости с углом при основании α:

$$a = g\sin\alpha.$$

Сила, которую надо приложить вдоль наклонной плоскости, чтобы перемещать тело равномерно вверх по плоскости:

$$F_{\uparrow} = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha.$$

1.1.2.12. Сила инерции: $\vec{F}_{\text{и}} = -m\vec{a}$, $m\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{F}_{\text{р}} + \vec{F}_{\text{и}}$. Если система отсчета движется с ускорением a по отношению к инерциальной системе отсчета, то такая система является неинерциальной (например, поезд, идущий с ускорением). Чтобы описывать движение относительно такой системы с помощью 2-го закона Ньютона (например, маятника в поезде), нужно считать, что на тело, кроме «обычной» равнодействующей силы $\vec{F}_р$, действует дополнительная сила инерции $\vec{F}_и = -m\vec{a}$.

1.1.3. Статика

1.1.3.1. *Равнодействующая сила* $(\vec{F}_р)$ — сумма сил, действующих на тело:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_1 + \ldots + \vec{F}_n = \vec{F}_р.$$

Если тело точечное, то под действием одной равнодействующей тело движется поступательно так, как под действием всех сил. В случае тела конечных размеров, кроме поступательного движения, возможно вращательное. Чтобы обеспечить правильное движение, включая вращательное, равнодействующая должна быть приложена в определенной точке протяженного тела.

Равнодействующая существует не для любой системы сил. Пару сил, т.е. две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, приложенных в разных точках тела, нельзя заменить одной так, чтобы воздействие на тело не изменилось.

1.1.3.2. Условие равновесия материальной точки:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_1 + \ldots + \vec{F}_n = \vec{F}_р = 0.$$

1.1.3.3. Момент M силы F относительно оси равен произведению модуля силы на расстояние l от оси до линии действия силы (l — плечо силы):

$$M \equiv F \cdot l.$$

Если сила вращает против часовой стрелки, ее момент считают положительным, по часовой стрелке — отрицательным.

1.1.3.4. Условия равновесия тела конечных размеров:

1) $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = 0$;

2) $M_1 + M_2 + \ldots + M_n = 0$.

Условие 1 обеспечивает отсутствие поступательного движения, условие 2 — вращательного. Предполагается, что все векторы сил лежат в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Если ось закреплена, то условие 1 выполнено автоматически за счет сил, приложенных к оси.

1.1.3.5. *Теорема о трех силах.* Если твердое тело конечных размеров находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке (рис. 1.7).

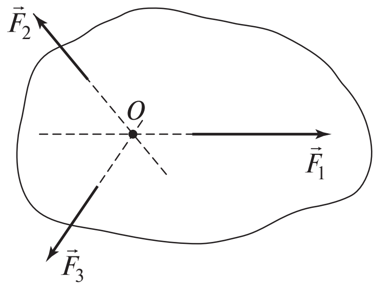

Рис. 1.7

1.1.3.6. Координата центра тяжести (ЦТ) $x_{ЦТ}$ системы материальных точек массами $m_1, m_2, ..., m_n$:

$$x_{ЦТ} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n},$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ — координаты точек. В ЦТ приложена равнодействующая всех сил тяжести, действующих на отдельные частицы системы.

Аналогичная формула для y-координаты ЦТ и z-координаты. Формулы применимы и для ЦТ системы шаров.

1.1.3.7. *Давление жидкости* p равно отношению силы давления F, действующей на поверхность со стороны жидкости, к площади S этой поверхности:

$$p = \frac{F}{S}.$$

Закон Паскаля. Давление, производимое на покоящуюся жидкость или газ, передается в любую точку жидкости одинаково по всем направлениям (рис. 1.8). То есть если в данной точке жидкости вращать манометр, из-

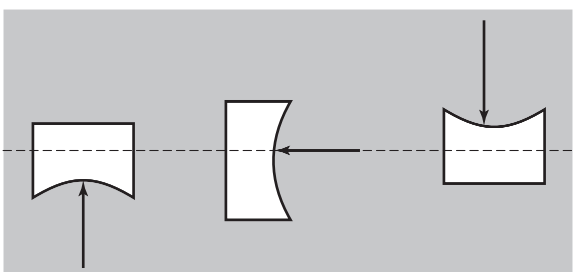

Рис. 1.8

меряя давление в разных направлениях, показания прибора будут одинаковыми.

1.1.3.8. Давление p столба жидкости под действием силы тяжести:

$$p = \rho g h,$$

где ρ — плотность жидкости; h — высота столба.

1.1.3.9. *Закон Архимеда*. На тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила Архимеда $F_А$, равная весу жидкости объема, равного объему погруженной в жидкость части тела:

$$F_А = \rho g V,$$

где ρ — плотность жидкости; V — объем погруженной части тела; g — ускорение свободного падения.

Закон применим и к газам.

1.1.3.10. *Условия плавания тел*:

$$1)\ F_А > mg,\ 2)\ F_А = mg,\ 3)\ F_А < mg,$$

где $F_А$ — сила Архимеда при полном погружении тела в жидкость; 1 — тело плавает, частично погрузившись в жидкость; 2 — тело в равновесии на любой глубине; 3 — тело тонет.

1.1.3.11. Вес P тела массой m при погружении его в жидкость плотности $\rho_ж < \rho_{тела}$:

$$P = mg - F_А = (\rho_{тела} - \rho_ж)Vg,$$

где V — объем погруженной части тела.

1.1.3.12. *Расход жидкости или газа*:

$$\Delta V = \upsilon S \Delta t,\ \Delta m = \rho \upsilon S \Delta t.$$

Жидкость (или газ) плотности ρ течет со скоростью υ по трубе сечением S. За время Δt из трубы вытечет объем жидкости ΔV массой Δm.

1.1.3.13. *Формула Торричелли*:

$$\upsilon^2 = 2gh.$$

Жидкость находится в тонкостенном сосуде. На глубине h от поверхности имеется небольшое отверстие. Жидкость вытекает из него со скоростью υ, такой же, как у тела, падающего с высоты h.

1.1.4. Законы сохранения

1.1.4.1. *Определение импульса тела* $\vec{p}$. Вектор, модуль которого равен произведению массы тела на модуль скорости, а направление совпадает с направлением вектора скорости:

$$\vec{p} \equiv m\vec{v}.$$

1.1.4.2. *Второй закон Ньютона в импульсной форме*:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t.$$

Изменение импульса тела $\Delta\vec{p}$ равно импульсу приложенной силы $\vec{F}$.

Импульсом силы называется произведение $\vec{F}\Delta t$. При неизменной массе тела такая форма 2-го закона Ньютона совпадает с использованной ранее $m\vec{a} = \vec{F}$.

1.1.4.3. *Полным импульсом* $\vec{P}_{\text{пол}}$ системы частиц называется вектор, равный сумме импульсов отдельных частиц:

$$\vec{P}_{\text{пол}} \equiv \sum \vec{p}_i \equiv \sum m_i\vec{v}_i.$$

1.1.4.4. *Изменение полного импульса* системы тел $\Delta\vec{P}_{\text{пол}}$ за время Δt определяется импульсом только внешних сил $\vec{F}_{\text{внш}}$:

$$\Delta\vec{P}_{\text{пол}} = \vec{F}_{\text{внш}}\Delta t.$$

Если внешних сил нет, то полный импульс системы тел не изменяется со временем:

$$\vec{P}_{\text{пол}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' + \ldots + m_n\vec{v}_n'.$$

1.1.4.5. Координата центра масс (ЦМ):

$$x_{\text{ЦМ}} \equiv \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты отдельных точечных тел (или шаров).

Координаты $y_{\text{ЦМ}}$, $z_{\text{ЦМ}}$ находятся аналогично.

1.1.4.6. Проекция скорости центра масс:

$$v_{\text{ЦМ}x} \equiv \frac{m_1v_{1x} + m_2v_{2x} + \ldots + m_nv_{nx}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{P_{\text{пол}x}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

где $v_{1x}, v_{2x}, \ldots, v_{nx}$ — проекции скоростей отдельных частиц массами m_1, $m_2, \ldots, m_n$; $P_{\text{пол}.x}$ — проекция полного импульса системы.

Если проекция внешней силы на ось x равна нулю, проекция $v_{\text{ЦМ}x}$ не изменяется. В частности, если при отсутствии проекции внешней силы на ось x ЦМ в начальный момент покоился, то он остается неподвижным все время.

1.1.4.7. Механическая работа A, производимая постоянной силой $\vec{F}$ над материальной точкой при ее перемещении $\vec{s}$:

$$A \equiv Fs\cos\alpha = \vec{F}\cdot\vec{s} = \vec{F}\cdot\vec{v}\cdot\Delta t,$$

где α — угол между вектором силы и вектором перемещения точки; $\vec{v}$ — скорость точки.

Полная работа $A_{\text{пол}}$ над системой материальных точек по определению равна сумме работ над отдельными точками:

$$A_{\text{пол}} \equiv \sum_i A_i.$$

1.1.4.8. Мощность N силы есть отношение работы силы к интервалу времени Δt, за которое эта работа была произведена:

$$N \equiv \frac{A}{\Delta t}.$$

1.1.4.9. Сила $\vec{F}$, действующая на тело в направлении вектора скорости $\vec{v}$, развивает мощность N:

$$N = F\cdot v.$$

1.1.4.10. Кинетическая энергия $E_{\text{кин}}$ тела массы m, движущегося со скоростью $\vec{v}$:

$$E_{\text{кин}} \equiv \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{p^2}{2m},$$

где $p = mv$ — модуль импульса тела.

Формула для кинетической энергии применима при поступательном движении тела, когда скорость у всех частиц тела одинаковая. Для нескольких поступательно движущихся тел общая кинетическая энергия равна сумме энергий отдельных тел:

$$E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

1.1.4.11. *Теорема об изменении кинетической энергии.* Изменение кинетической энергии системы равно работе всех внутренних и внешних сил, действующих на тела системы:

$$E_{\text{кин}1} - E_{\text{кин}0} = \sum_i A_i.$$

1.1.4.12. Упругое центральное столкновение двух шаров массами m_1, m_2:

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1x} + 2m_2v_{2x}}{m_1 + m_2}, \quad u_{2x} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2x} + 2m_1v_{1x}}{m_1 + m_2},$$

где v_{1x}, v_{2x} — проекции скоростей шаров до столкновения; u_{1x}, u_{2x} — проекции после столкновения.

Если массы шаров одинаковые, т.е. $m_1 = m_2$, шары «обмениваются» скоростями:

$$u_{1x} = v_{2x}, u_{2x} = v_{1x}.$$

1.1.4.13. Описание упругого центрального столкновения двух шаров массами m_1, m_2 в системе отсчета, где ЦМ покоится:

$$u'_{1x} = -u_{1x}, u'_{2x} = -u_{2x},$$

где u_{1x}, u_{2x} — проекции скоростей до удара; u'_{1x}, u'_{2x} — проекции скоростей после удара.

В этой системе отсчета проекции скоростей частиц после удара изменяют знак, не изменяясь по модулю.

1.1.4.14. Потенциальная энергия $E_{\text{упр}}$ упруго деформированного тела:

$$E_{\text{упр}} = \frac{kx^2}{2},$$

где k — жесткость; x — величина деформации.

Чаще всего формула используется в задачах с пружинами, резиновыми шнурами и т.д.

1.1.4.15. Потенциальная энергия $E_{\text{п}}$ тела, поднятого над Землей на высоту h:

$$E_{\text{п}} = mgh = A.$$

Эта энергия равна работе A, совершаемой силой тяжести при падении тела с высоты h.

1.1.4.16. Сохранение полной механической энергии при падении тела с высоты h с начальной скоростью $v_{\text{вверху}}$:

$$E_{\text{к.внизу}} = E_{\text{полн.вверху}}, \quad \frac{mv^2_{\text{внизу}}}{2} = \frac{mv^2_{\text{вверху}}}{2} + mgh.$$

1.1.4.17. Подвешенный на нитке длиной l шарик, когда проходит положение равновесия после отклонения на угол α, имеет скорость

$$v = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}.$$

1.1.4.18. Гравитационная потенциальная энергия взаимодействия двух точечных или сферически симметричных тел:

$$E_\text{г} = -\frac{GmM}{R},$$

где R — расстояние между центрами.

За нулевой уровень энергии принята энергия, соответствующая бесконечно большому расстоянию между телами.

1.1.4.19. *Закон сохранения энергии*. Изменение механической энергии $\Delta E_\text{мех}$ системы происходит из-за работы сил трения между телами, входящими в систему $A_\text{тр.вн}$, и работы внешних сил (любых, не только трения) $A_\text{внш}$:

$$\Delta E_\text{мех} = A_\text{тр.вн} + A_\text{внш}.$$

1.1.4.20. КПД $\eta_\text{пл}$ наклонной плоскости равен

$$\eta_\text{пл} \equiv \frac{\Delta E_\text{пот}}{A_\text{под}} \cdot 100\%,$$

где $\Delta E_\text{пот}$ — прирост потенциальной энергии при подъеме тела по наклонной плоскости; $A_\text{под}$ — затраченная на подъем работа.

1.1.5. Механические колебания и волны

1.1.5.1. *Второй закон Ньютона для пружинного маятника*:

$$ma = -kx \Rightarrow x'' + \frac{k}{m}x = 0, \quad x'' + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Уравнение описывает гармонические колебания координаты — изменение со временем координаты тела при гармонических колебаниях

$$x(t) = x_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = x_m \cdot \sin(2\pi\nu t + \varphi_0) = x_m \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right),$$

где x_m — амплитуда колебаний; ν — частота колебаний; $T = \frac{1}{\nu}$ — период колебаний, т.е. наименьший промежуток времени, через который состояние повторяется; $\omega = 2\pi\nu$ — циклическая частота; φ_0 — начальная фаза колебаний.

1.1.5.2. Соотношения между периодом колебаний T, частотой ν, циклической (угловой) частотой ω, числом колебаний N за время τ:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\tau}{N}.$$

1.1.5.3. Изменение во времени скорости тела $\upsilon(t)$ при гармонических колебаниях с циклической частотой ω:

$$\upsilon(t) = x(t)' = \omega \cdot x_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = \upsilon_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0), \quad \upsilon_m = \omega \cdot x_m,$$

где x_m — амплитуда координаты; υ_m — амплитуда колебаний скорости; φ_0 — начальная фаза колебаний.

1.1.5.4. Изменение со временем ускорения тела $a(t)$ при гармонических колебаниях с циклической частотой ω:

$$a(t) = \upsilon'(t) = x''(t) = -\omega^2 x_m \sin(\omega t + \varphi_0) = -a_m \sin(\omega t + \varphi_0),$$
$$a_m = \omega^2 x_m = \omega \upsilon_m,$$

где x_m — амплитуда координаты; υ_m — амплитуда скорости; a_m — амплитуда колебаний ускорения; φ_0 — начальная фаза колебаний.

1.1.5.5. *Формула Гюйгенса*. Период T малых колебаний математического маятника длиной l равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

где ν, ω — соответственно частота и циклическая частота маятника.

1.1.5.6. Частота ν, циклическая частота ω, период T гармонических колебаний груза массы m на пружине жесткости k (пружинный маятник):

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

С такой частотой изменяются координата, скорость, ускорение груза. Кинетическая и потенциальная энергии изменяются с частотой, вдвое большей, — 2ν.

1.1.5.7. Полная энергия пружинного маятника (E):

$$E = \frac{m\upsilon(t)^2}{2} + \frac{kx(t)^2}{2} = m\left[\frac{\upsilon(t)^2}{2} + \frac{\omega^2 x(t)^2}{2}\right] = \mathrm{const}$$

— сумма кинетической энергии и потенциальной упругой энергии. Координата $x(t)$ и скорость $v(t)$ изменяются со временем по гармоническим законам, полная энергия не изменяется (не зависит от времени).

Второе выражение для полной энергии (с частотой ω) применимо и для малых колебаний математического маятника. Максимальная кинетическая энергия равна максимальной потенциальной энергии:

$$\frac{mv_m^2}{2} = \frac{kx_m^2}{2}.$$

1.1.5.8. Плоская волна амплитуды y_m с периодом колебаний T и длиной волны λ движется в положительном направлении оси x. Отклонение от положения равновесия $y(t, x)$ в точке с координатой x в момент времени t описывается уравнением бегущей волны:

$$y(t, x) = y_m \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = y_m \cos\varphi(t, x).$$

Фазы колебаний в волне $\varphi(t, x)$ в точках, отстоящих на расстояние λ друг от друга в один и тот же момент, отличаются на 2π:

$$\varphi(t, x) = \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}.$$

1.1.5.9. Соотношение между частотой ν колебаний в волне, длиной волны λ и скоростью волны c:

$$\lambda\nu = c.$$

Применимо для звуковых и электромагнитных волн.

1.1.5.10. «Набег» фазы:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda}.$$

При распространении волны фаза колебаний в один и тот же момент времени в точках, отстоящих на расстояние Δx друг от друга, отличается на $\Delta\varphi$.

1.1.5.11. Суммарное колебание давления $p(t, x)$ при возбуждении двух когерентных звуковых волн частоты ω одинаковой амплитуды p_0 с разностью хода $\Delta s = s_2 - s_1$:

$$p(t, x) = 2p_0 \cos\left(\pi\frac{s_2 - s_1}{\lambda}\right)\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x - \delta\right).$$

1.1.5.12. Условие на разность хода Δs двух когерентных волн для наблюдения минимума на интерференционной картине:

$$\Delta s = \frac{\lambda(2m+1)}{2},\ m = 0, \pm1, \pm2, \ldots ,$$

где λ — длина волны в среде.

1.1.5.13. Условие на разность хода Δs двух когерентных волн для наблюдения максимума на интерференционной картине:

$$\Delta s = \lambda m,\ m = 0, \pm1, \pm2, \ldots ,$$

где λ — длина волны в среде.

1.1.5.14. *Доплеровский сдвиг частоты*. Скорости $\upsilon_{\text{пр}}$, $\upsilon_{\text{ис}}$ приемника и источника меньше скорости звука c:

1) неподвижный источник частоты ν. Приближающийся со скоростью $\upsilon_{\text{пр}}$ приемник воспринимает частоту

$$\nu_p = \nu \cdot \left(1 + \frac{\upsilon_{\text{пр}}}{c}\right);$$

2) движущийся к неподвижному приемнику источник. Приемник ловит частоту

$$\nu_i = \frac{\nu}{1 - \frac{\upsilon_{\text{ис}}}{c}}.$$

1.2. Задачи

1.2.1. Кинематика

1. В дорожной полиции раздался звонок: «Авария в двух километрах...». Тут связь прервалась. Какую важную информацию не успел передать звонивший? Что он не указал с точки зрения кинематики?

2. Поезд, не изменяя скорости, проезжал вечером мимо полустанка. Мальчик, лежаший в вагоне на верхней полке, нечаянно уронил телефон. Какую траекторию телефона увидел мальчик? Вагон был освещен, и падение телефона можно было наблюдать с платформы. Как выглядела траектория падавшего телефона для наблюдателя на платформе?

3. Мы говорим «Солнце всходит и заходит», т.е. рассуждаем о движении Солнца. Какое тело при таком разговоре подразумевается как тело отсчета?

4. Если бы можно было встать на Солнце и наблюдать оттуда за Землей, то какую картину движения Земли мы бы зафиксировали?

5. Спутник, запущенный в плоскости экватора, «висит» над точкой A поверхности Земли. С этой точкой жестко связана прямоугольная система координат xyz (рис. 1.9). Ось y системы направлена перпендикулярно поверхности, и спутник находится на этой оси на высоте $h = 35\,800$ км. Другая система координат XYZ имеет начало в центре Земли, ось Z проходит через Северный полюс. Ось Y этой системы в полночь совпадает по направлению с осью y. Найти координаты спутника в системах осей xyz и XYZ в 6 ч утра. Радиус Земли принять равным 6400 км.

Ответ: xyz: 0; 35 800 км; 0. XYX: 42 200 км; 0; 0.

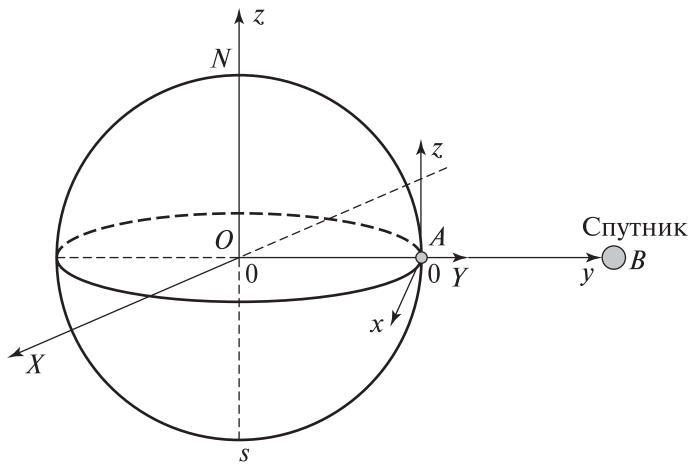

Рис. 1.9

6. Форвард по свистку судьи производит угловой удар из точки A_0 (рис. 1.10). Вратарь ловит мяч в точке A_1 и выбивает его своему полузащитнику в точку A_2. Оттуда мяч попадает к нападающему в точке A_3, и следует удар по воротам в точку A_4.

Найти:

а) модуль радиуса-вектора $\vec{r}_0$ мяча (в точке A_0);

б) модуль радиуса-вектора $\vec{r}_1$ мяча в руках вратаря (в точке A_1);

в) модуль вектора перемещения $|\Delta\vec{r}_{21}|$ мяча из начальной точки A_0 в точку A_1: $\Delta\vec{r}_{10} = \vec{r}_1 - \vec{r}$;

г) координаты мяча x, y в начальной точке A_0;

д) модуль вектора перемещения $|\vec{r}_{40}|$ мяча из начальной точки A_0 в конечную точку A_4: $\vec{r}_{40} = \vec{r}_4 - \vec{r}_0$;

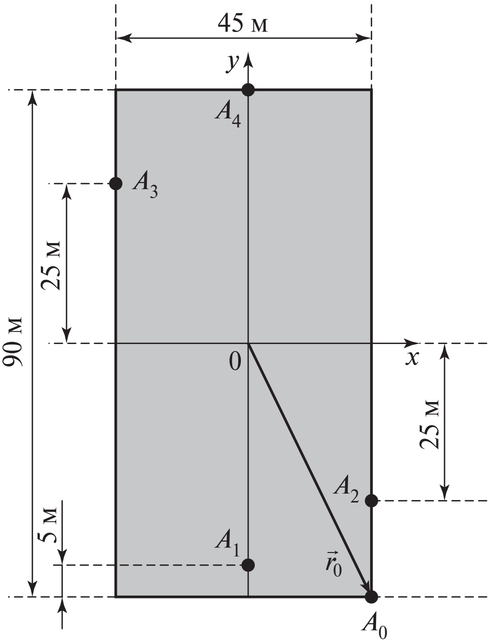

Рис. 1.10

е) длину пути s_{40} мяча из начальной точки A_0 в конечную точку A_4.

Ответ: а) 50,3 м; б) 40 м; в) 23 м; г) $x = 22{,}5$ м, $y = -45$ м; д) 92,77 м; е) 147,4 м.

7. Спутник на круговой орбите вокруг Земли прошел путь $s = 13\,404$ км. Радиус r орбиты спутника вдвое больше земного радиуса. Чему равен модуль вектора перемещения $|\Delta\vec{r}|$ спутника за это время? Земной радиус принять равным $R = 6400$ км.

Ответ: 12 800 км.

8. Астронавты высадились на полюсе экзопланеты радиусом R, в 5 раз меньшим, чем радиус $R_З$ Земли. Двигаясь вдоль меридиана на вездеходе, они достигли экватора и прошли по нему на противоположную сторону планеты. Определить путь и модуль перемещения вездехода по отношению к планете.

Ответ: 6032 км.

9. Автомобиль первую половину пути ехал со скоростью $v_1 = 120$ км/ч, вторую половину — со скоростью $v_2 = 80$ км/ч. Найти среднюю скорость движения автомобиля на всем пути.

Ответ: 96 км/ч.

10. Автомобиль первую половину времени, затраченного на поездку, ехал со скоростью $v_1 = 120$ км/ч, а вторую половину — со скоростью $v_2 = 80$ км/ч. Найти среднюю скорость движения автомобиля.

Ответ: 100 км/ч.

11. Автомобиль за время $t_1 = 1{,}5$ ч проехал по шоссе на север расстояние $s_1 = 90$ км. Затем он повернул на восток и по скоростному шоссе в течение времени $t_2 = 1$ ч проехал расстояние $s_2 = 120$ км. Найти среднюю путевую скорость $v_{\text{ср.пут}}$ автомобиля и модуль вектора его средней скорости $|\vec{v}_{\text{ср}}|$.

Ответ: 84 км/ч; 60 км/ч.

12. Расстояние между городами A и B равно $s = 250$ км. Каждый раз, когда минутная стрелка часов показывает 12.00, из города A в город B отправляется автобус и идет без остановки со скоростью $v = 100$ км/ч. В эти же моменты времени автобусы отправляются из B в A и движутся с той же скоростью по тому же шоссе. Велосипедист выехал из города A в 8 ч утра и через 7 ч непрерывной езды с постоянной скоростью прибыл в город B. Сколько встречных и попутных автобусов встретил он между городами на своем пути? Решить графически.

Ответ: Попутных 4; встречных 9.

13. Мальчик переплывает канал шириной $d = 100$ м по кратчайшему пути за время $t = 1{,}5$ мин (в канале нет течения).

А. За какое минимальное время он переплывет речку такой же ширины, если будет плыть с той же скоростью v относительно воды, как и в канале? Скорость течения воды в реке $u = 5$ км/ч.

Б. На какое расстояние снесет вода мальчика вниз по течению при переправе за минимальное время?

В. Чему равен путь мальчика относительно берега при таком плавании?

Г. Сможет ли мальчик переплыть речку перпендикулярно берегу (для наблюдателя на берегу)?

Д. Какова длина самого короткого пути относительно берега, по которому мальчик может переплыть канал, и сколько времени займет этот кратчайший путь?

Е. Насколько снесет течение пловца при движении по кратчайшему пути?

Ответ: А. 1,5 мин; Б. 125 м; В. 160 м; Г. Не сможет; Д. 125 м, 2,5 мин; Е. 75 м.

14. Девочка шла по полю к дороге ДД′ и, когда оказалась в точке B, увидела на дороге в точке A нужный ей автобус, ехавший вправо. Быстро побежала, чтобы как можно раньше выйти на дорогу, пока автобус не проехал это место. В каком направлении ей нужно бежать (по прямой) и сколько времени понадобится для выхода на дорогу по оптимальному пути? Скорость автобуса $u = 12$ м/с, скорость девочки $v = 4$ м/с, расстояния указаны на рис. 1.11.

Ответ: 19,47°; 5,3 с.

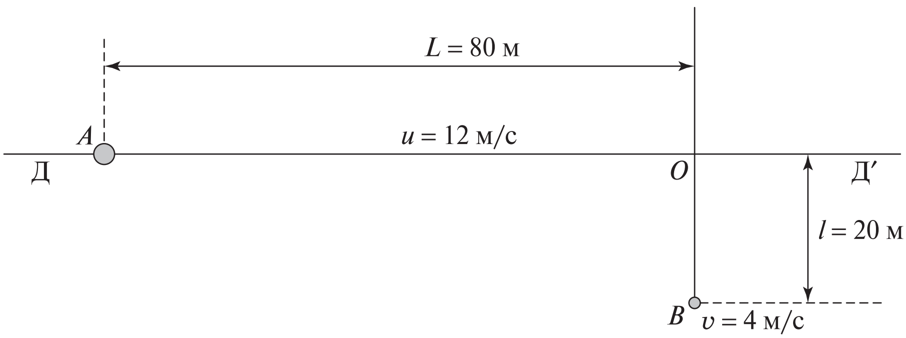

Рис. 1.11

15. Перелет из Каира в Женеву при боковом ветре занимает время $t_{\perp} = 4$ ч. При встречном ветре такой же скорости u полет длится большее время — $t_{\downarrow\uparrow} = 4$ ч 27 мин. Какое время t летит самолет по этому маршруту, когда нет ветра?

Ответ: 3,977 ч.

16. Лодка плывет из точки A на правом берегу реки в точку B на левом и обратно по линии AB, составляющей угол $\alpha = 60°$ с линией берега. Общее время движения туда и назад $t = 24$ мин. Найти угол φ между скоростью v лодки относительно воды и линией AB на прямом и обратном пути и модуль этой скорости. Скорость течения $u = 1{,}8$ км/ч, длина $AB = L = 1200$ м.

Ответ: 14,27°; 6,32 км/ч.

17. На рис. 1.12 изображен график изменения во времени проекции скорости v частицы на ось x. Каковы среднее значение проекции a_x ускорения частицы в интервале времени от нуля до 6 с и мгновенное ускорение при $t = 18$ с?

Ответ: 4 м/с^2; 2,4 м/с^2.

18. Велосипедист ехал на север со скоростью $v = 18$ км/ч, затем, не изменяя скорости, сделал правый поворот и поехал на восток (рис. 1.13).

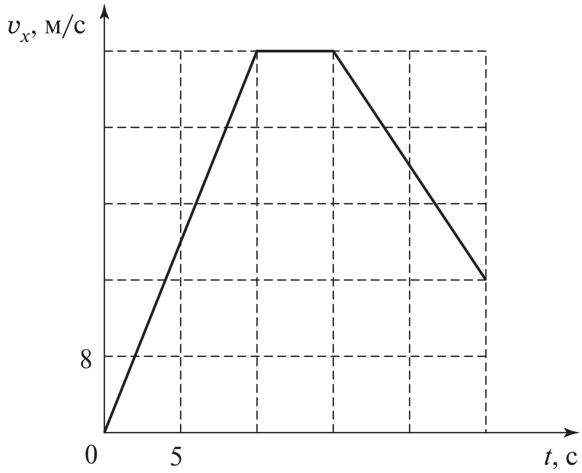

Рис. 1.12

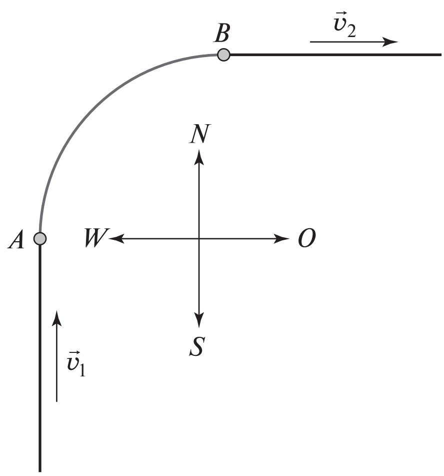

Рис. 1.13

Участок траектории AB велосипедиста — дуга окружности радиуса $R = 20$ м. Чему равен модуль среднего ускорения $a_{ср}$ велосипедиста на участке AB?

Ответ: 1,125 м/с^2.

19. Частица, движущаяся с постоянной скоростью $\vec{v}_0$, изменяет режим движения — начинает двигаться с постоянным ускорением $\vec{a}$. Показать, что спустя время t после изменения характера движения скорость $\vec{v}(t)$ и начальная скорость $\vec{v}_0$ связаны соотношением $v^2 - v_0^2 = 2\vec{a}\Delta\vec{r}$, где $\Delta\vec{r}$ — перемещение частицы за время t.

20. Задан график зависимости проекции ускорения от времени (рис. 1.14). В момент времени $t = 0$ тело находилось в состоянии покоя в начале оси x. Считая масштабные единицы t_0, a_0 известными величинами, найти путь и перемещение тела за время $8t_0$. Построить график зависимости координаты тела $x(t)$ от времени на интервале $0 \le t \le 8t_0$, считая $a_0 = 2$ м/с^2, $t_0 = 1$ с.

Ответ: 8 м; 56 м.

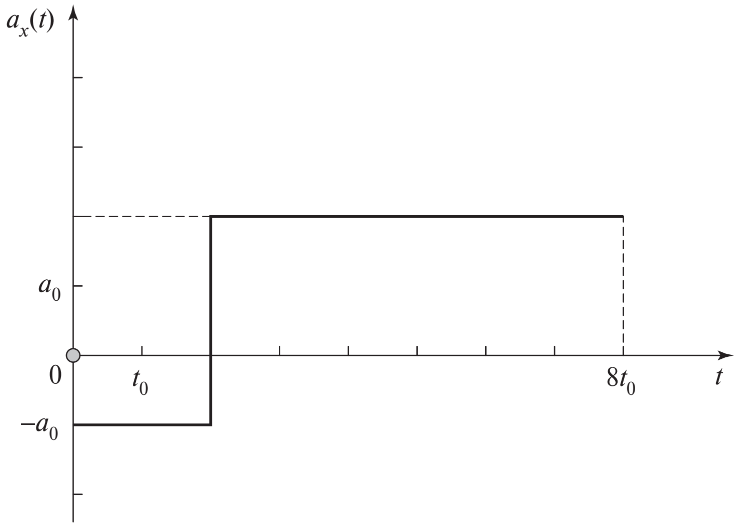

Рис. 1.14

21. Вереница одинаковых автомобилей выстроилась перед закрытым шлагбаумом практически вплотную друг к другу (рис. 1.15). При открытии шлагбаума каждый автомобиль трогается с места только после того, как стоящая впереди него машина сдвигается на половину своей длины $l = 4$ м. Автомобиль разгоняется до скорости $u = 100$ км/ч на расстоянии $L = 100$ м. Достигнув этой скорости, автомобиль движется без ускорения. Определить среднюю скорость $v_{ср}$ очень далекого автомобиля на участке до шлагбаума, начиная отсчет времени от открытия шлагбаума.

Ответ: 12,38 км/ч.

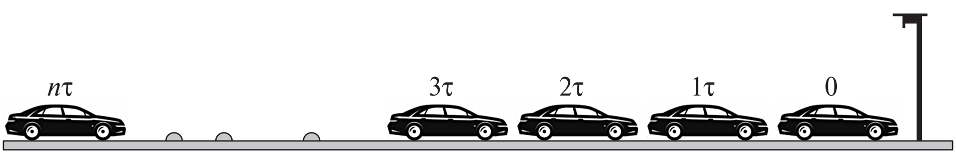

Рис. 1.15

22. Мотоциклист отъезжает от бензоколонки и со скоростью $v_м = 90$ км/ч движется по прямому шоссе навстречу велосипедисту. Велосипедист едет равномерно со скоростью $v_в = 18$ км/ч. В начальный момент расстояние между ними $x_0 = 600$ м. На каком расстоянии $x_{вм}$ от бензоколонки произойдет встреча и какое время t_1 пройдет от начала движения мотоциклиста до встречи? Изменится ли место встречи, если скорости участников движения будут в 2 раза больше?

Построить графики, отложив по горизонтальной оси время движения, а по вертикальной — расстояния велосипедиста и мотоциклиста от бензоколонки.

Ответ: 20 с; 500 м.

23. Автомобиль выехал из пункта A в 14 ч и направился в пункт B внутри города, рассчитывая ехать со скоростью $v = 60$ км/ч, чтобы прибыть вовремя. Неожиданно оказалось, что на участке длиной в треть пути можно было ехать со скоростью $v = 80$ км/ч, и автомобилист приехал на 15 мин раньше, чем рассчитывал. К какому времени должен был приехать водитель?

Ответ: К 17 ч.

24. Полчища удалялись от столицы халифата со скоростью v, продвигаясь на запад. Впереди на боевом верблюде-дромадере ехал Релпод. Отправляя в поход армаду Релпода, халиф приказал через каждый интервал времени T присылать ему донесения о ситуации. Сообщение доставляли голуби, летавшие со скоростью c (рис. 1.16). Получив несколько сообщений, халиф пришел в ужас: сообщения приходили с другим периодом T'! Халиф решил, что у Релпода сбились часы и вся тонко задуманная операция срывается. Какова ошибка $\Delta T = T' - T$ часов Релпода, по мнению халифа, и прав ли он?

Ответ: $\dfrac{Tv}{c}$.

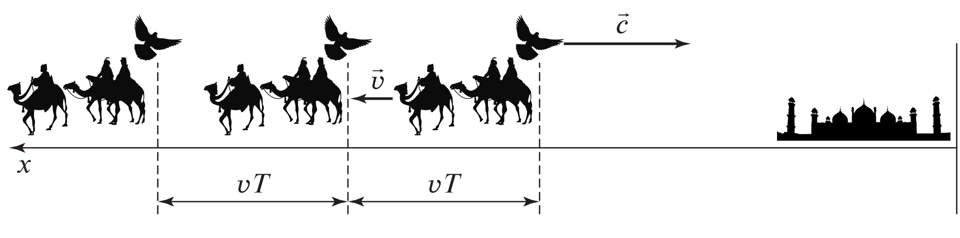

Рис. 1.16

25. Шайба, брошенная на лед со скоростью $v_0 = 90$ км/ч, пролетела по льду 62,5 м, потеряв 10% скорости. Чему было равно ускорение шайбы?

Ответ: 0,95 м/с^2.

26. Поезд тормозит перед станцией. На последнем километре его скорость уменьшилась на $\Delta v = 15$ м/с. Найти скорость поезда перед включением тормозов, зная, что торможение началось в 4 км от станции и режим движения был равнозамедленным.

Ответ: 76,37 км/ч.

27. Гоночный автомобиль на дистанции $L = 870$ м разгоняется до скорости $v_{\text{кон}} = v(L) = 300$ км/ч. Считая, что разгон происходит с постоянным ускорением $\vec{a}$, определить усредненные скорости автомобиля по времени $v_{\text{ср}t}$ и по пути $v_{\text{ср}s}$.

Ответ: 150 км/ч; 200 км/ч.

28. На рис. 1.17 представлен график зависимости координаты тела $x(t)$ от времени.

А. Приблизительно определите по графику, в какие моменты времени скорость тела обращается в ноль.

Б. Зависимость координаты от времени на этом графике описывается формулой $x(t) = 3t + 4\sin 2t$. Найти аналитически (т.е. из формул) точки на шкале времени, когда проекция скорости частицы $v_x(t) = 0$, и сравнить с теми точками, которые ранее получены приближенно прямо из графика.

В. Постройте графики $v_x(t)$ и $a_x(t)$, используя графопостроитель (например: http://www.alentum.com/agrapher/).

Ответ: 1 с; 2,2 с.

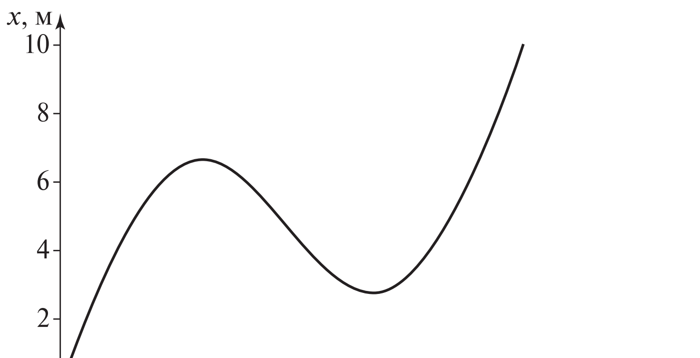

Рис. 1.17

29. Мальчик подбросил мяч вертикально вверх со скоростью $v_0 = 20$ м/с.

А. На какую максимальную высоту h_{max} поднялся мячик?

Б. Сколько времени он находился в полете?

В. В какой момент времени $t = \tau$ мячик оказался на высоте $h_п = 0{,}5h_{max}$, вдвое меньше максимальной?

Ответ: А. 20 м; Б. 4 с; В. 0,58 с, 3,4 с.

30. Вертикальное движение тела описывается уравнением $y(t) = 5t^2 - 20t$. Через 5 с после начала движения тело оказалось на земле. Где выбрано начало оси y и куда эта ось направлена?

Ответ: 25 м; вниз.

31. Воздушный шар стартует с земли вертикально с ускорением $a = 2$ м/с^2. Спустя время $\tau = 10$ с после старта из кабины выпал предмет (рис. 1.18). Через сколько времени после этого предмет окажется на земле?

Ответ: 12,2 с.

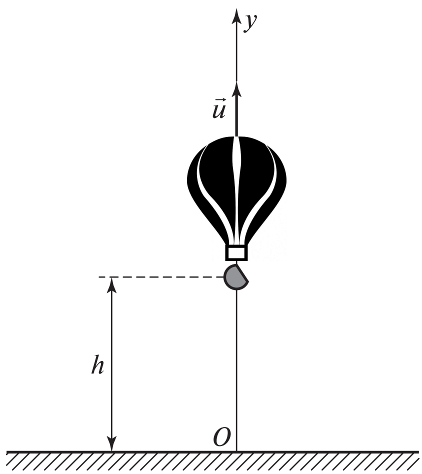

Рис. 1.18

32. Камень отпустили без начальной скорости на некоторой высоте h. Пути за первую и последнюю секунды падения вместе составили половину начальной высоты. Чему равна высота h?

Ответ: 80 м.

33. Зенитчик делает два выстрела вертикально вверх, стараясь, чтобы снаряды столкнулись в воздухе. Скорость первого снаряда при вылете из орудия $v_0 = 800$ м/с, второго — на $\eta = 15\%$ меньше. На какое время τ должен запаздывать второй выстрел, чтобы снаряды столкнулись в полете как можно раньше?

Ответ: 54,14 с.

34. Снаряд вылетает из орудия со скоростью $\vec{v}_0$ под углом α к горизонту. Написать формулы для времени полета снаряда τ, дальности L полета, максимальной высоты H траектории и уравнения траектории.

Ответ: $\dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$; $\dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$; $\dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$; $y = x \cdot \mathrm{tg}\alpha - g \cdot \dfrac{x^2(1+\mathrm{tg}^2\alpha)}{2v_0^2}$.

35. Волейбольный мяч после подачи упал на землю на расстоянии $L = 20$ м от подававшего игрока. Определить, с какой скоростью v_0 вылетел мяч сразу после подачи, если известно, что спустя 1 с после вылета вектор скорости мяча был направлен горизонтально.

Ответ: 14,14 м/с.

36. С вертолета, зависшего на некоторой высоте, выпускают одновременно две одинаковые сигнальные ракеты горизонтально на запад и на восток. Через 5 с полета векторы скоростей ракет оказываются перпендикулярными друг другу. Через какое время τ векторы скоростей ракет окажутся перпендикулярными при повторном эксперименте, если в этом случае ракету, направленную на запад, отклонили от горизонтали вверх на 60°?

Ответ: 6,3 с.

37. Волейбольная сетка натянута так, что ее верхний край находится на высоте $h = 2{,}43$ м над землей (рис. 1.19). Волейболист принял мяч у самой земли на дальнем краю площадки $a = 9$ м от сетки. С какой минимальной скоростью $v_{\min}$ нужно отбить мяч, чтобы он смог пролететь над сеткой? Под каким углом $\alpha_{\min}$ к горизонту вылетает мяч в этом случае?

Ответ: 10,84 м/с; 52,56°.

38. Астронавты обнаружили в глубине планеты гигантскую сферическую полость радиусом $R = 50$ м. Стенки полости были абсолютно гладкие. Астронавт выстрелил шариком из точки A сферы, держа метатель шариков под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, и засек время. Через время $\tau = 10{,}90$ с шарик, упруго отразившись от стенки сферы в точке B, вернулся в точку вылета (рис. 1.20). Вычислить ускорение свободного падения g на планете, используя измеренные величины R, α, τ.

Ответ: 5,13 м/с^2.

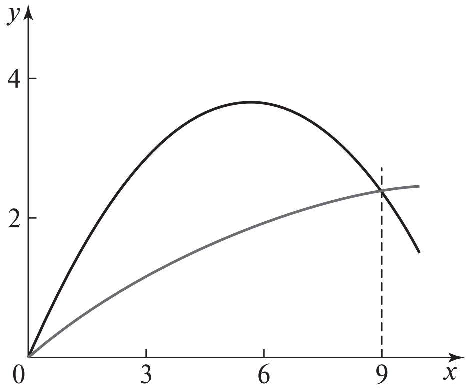

Рис. 1.19

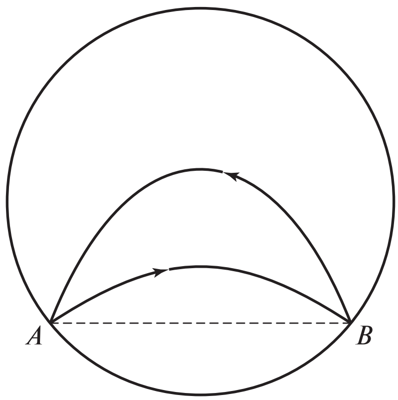

Рис. 1.20

39. Луна делает оборот вокруг Земли за 27,3 суток. Определить ее угловую скорость ω и линейную скорость v. Орбиту считать круговой с радиусом $R = 3{,}84 \cdot 10^5$ км.

Ответ: $2{,}66 \cdot 10^{-6}$ 1/с; 1023 м/с.

40. На рис. 1.21 две шестерни, сцепленные друг с другом. Диаметр меньшей шестерни $d_1 = 14$ см. Найти диаметр d_2 большей шестерни, если известно, что отношение их частот вращения равно 1,5.

Ответ: 21 см.

41. Стержень длиной $l = 9$ см вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец. По стержню, удаляясь от оси, ползет светлячок со скоростью $v = 15$ мм/с (рис. 1.22). Чему равна угловая скорость ω вращения стержня, если он сделал 3 оборота,

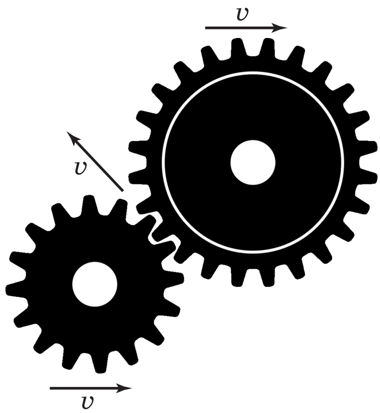

Рис. 1.21

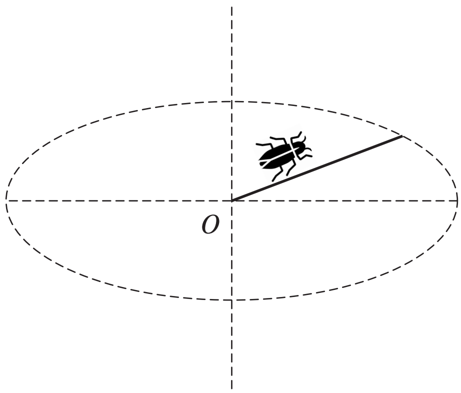

Рис. 1.22

пока светлячок добрался от оси до конца стержня? Нарисуйте эскиз траектории светлячка относительно неподвижной системы отсчета.

42. В городском парке имеются две круговые концентрические велодорожки радиусами $R = 50$ м и $r = 30$ м. Два велосипедиста едут против часовой стрелки по большой и малой дорожкам с одинаковой скоростью $u = 18$ км/ч, то сближаясь, то удаляясь друг от друга (рис. 1.23). Чему равно расстояние l между велосипедистами в тот момент, когда они сближаются с максимальной скоростью $v_{\max}$ и чему равна эта скорость?

Ответ: 40 м; 2 м/с.

43. На испытательном полигоне автомобиль трогается с места и разгоняется на круговой трассе радиусом $R = 1$ км. Показания спидометра

Рис. 1.23

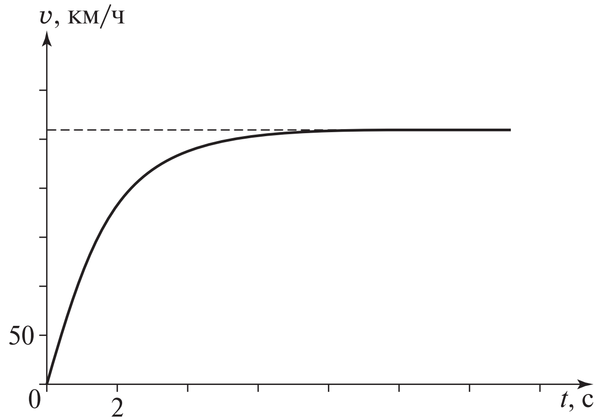

Рис. 1.24

автомобиля записывает бортовой компьютер. На рис. 1.24 представлен график скорости с экрана бортового компьютера. Что можно сказать по виду этого графика об ускорении автомобиля в момент времени $t = 10$ с?

Ответ: 4,8 м/с^2.

44. Тело равномерно движется по окружности радиуса r со скоростью v. За какой-то промежуток времени оно прошло четверть оборота? Найти модуль среднего ускорения за этот промежуток времени.

Ответ: $2\sqrt{2} \cdot \dfrac{v^2}{\pi r}$.

45. Тело равномерно движется по окружности радиуса r со скоростью v. Найти модуль мгновенного ускорения тела.

Ответ: $a = v\omega = \omega^2 r = \dfrac{v^2}{r}$.

46. Колеса автомобиля на испытательном стенде вращаются, делая $\nu = 597$ оборотов в минуту (рис. 1.25). С какой скоростью v поедет автомобиль, если его опустить на асфальт, не изменяя частоты вращения колес? Диаметр колес $2R = 0{,}8$ м.

Ответ: 90 км/ч.

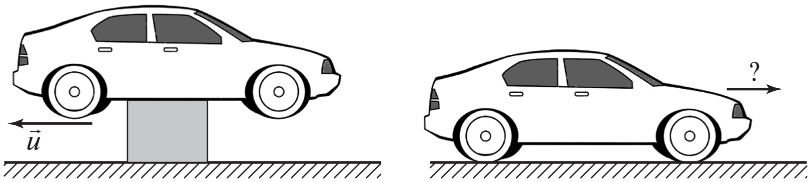

Рис. 1.25

47. По дороге движутся две машины с одинаковой скоростью $v = 90$ км/ч. Впереди едет грузовик, а за ним — легковой автомобиль (рис. 1.26). На дорогу во время дождя вынесло много камней, и иногда камни вылетают, срываясь с колес грузовика. На каком минимальном расстоянии $L_{\min}$ от грузовика должен держаться легковой автомобиль, чтобы избежать попадания камня в него?

Ответ: 62,5 м.

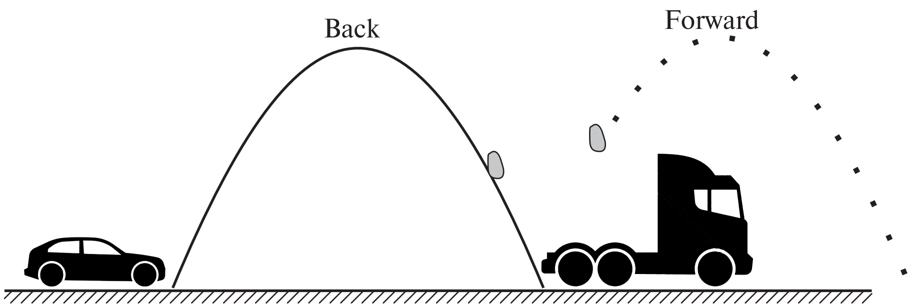

Рис. 1.26

48. Верхний край лестницы, приставленной к стене, скользит по стене со скоростью $v = 1{,}5$ м/с. Найти скорость u нижнего края, скользящего по полу, в тот момент, когда угол α между лестницей и горизонтом равен 60°.

Ответ: 2,6 м/с.

49. Мальчик катается на карусели радиусом $r = 2{,}5$ м с лошадками. Карусель делает полный оборот за время $T = 10$ с. Мама наблюдает за мальчиком со скамейки в парке, расположенной на расстоянии $R = 15$ м от оси карусели (рис. 1.27).

А. С какой скоростью $v_{\text{мальч}}$ движется мальчик относительно мамы? Считать, что лошадки находятся на самом краю карусели.

Б. С какой скоростью $v_{\text{мам}}$ движется мама относительно мальчика?

Ответ: А. 1,6 м/с; Б. 9,6 м/с.

Рис. 1.27

50. При испытании в лаборатории гироскутера на его колеса положили гладкую панель. Противоположный край панели шарнирно закреплен на горизонтальной оси $O'O''$ (рис. 1.28). Угол между панелью и горизонтальной поверхностью α. Радиус колеса скутера R, он едет со скоростью $\vec{v}$. Найти угловую скорость ω вращения панели. Рассмотреть два случая:

а) панель опирается на крыло, расположенное близко над колесом;

б) панель опирается непосредственно на колесо.

Ответ: $\dfrac{2v}{R}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$.

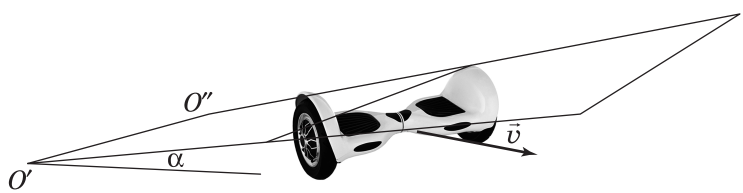

Рис. 1.28

1.2.2. Динамика

1. Мальчик, едущий в скором поезде, решил проверить принцип относительности Галилея. Он несколько раз отпускал с верхней полки, с высоты $h = 2{,}6$ м, мячик и каждый раз убеждался, что мячик падает вертикально. Когда поезд приближался к станции, к мальчику зашел приятель из соседнего купе, и мальчик повторил эксперимент с мячиком для приятеля. Но они обнаружили, что мячик отклонился от вертикали на 20 см. Почему эксперименты дали разные результаты? Чему равно ускорение вагона?

Ответ: 0,77 м/с^2.

2. Из золота массой $m = 3$ г изготовили тонкую фольгу общей площадью $S = 1{,}5$ м^2. Какова толщина d фольги?

Ответ: 1 мкм.

3. В лодке массой $M = 240$ кг стоит человек массой $m = 60$ кг. Человек прыгает в горизонтальном направлении, удаляясь от лодки со скоростью $v_{\text{отн}} = 4$ м/с. С какой скоростью $v_{\text{л}}$ относительно берега плывет лодка после прыжка?

Ответ: 0,6 м/с.

4. Санки с седоком общей массой $m = 120$ кг разгоняли на льду озера на расстоянии $s = 15$ м (рис. 1.29). С какой силой F тянули санки, если скорость к концу разгона оказалась равной $v = 18$ км/ч?

Ответ: 100 Н.

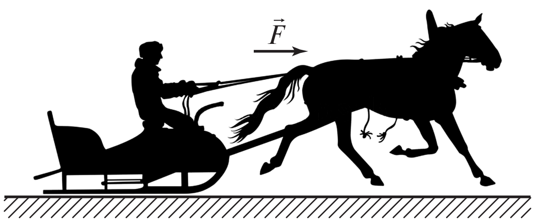

Рис. 1.29

5. Электрон движется в конденсаторе в направлении силовой линии. Какая сила F действует на него, если он снизил скорость от $v_1 = 2 \cdot 10^6$ м/с до $v_2 = 1{,}5 \cdot 10^6$ м/с за микросекунду? Масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Ответ: $4{,}5 \cdot 10^{-19}$ Н.

6. Два мальчика перетягивают веревку. Первый мальчик массой $m_1 = 45$ кг тянет веревку с силой $F_1 = 100$ Н. Масса второго мальчика

$m_2 = 30$ кг. С какой силой F_2 тянет веревку второй мальчик? Массой веревки можно пренебречь.

Ответ: 100 Н.

7. На гладком столе лежит шарик массой $m = 50$ г. К нему приложены две горизонтальные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, модули которых равны 3 Н и 4 Н соответственно. Угол α между векторами сил может быть любой. В каких пределах изменяется ускорение a шарика при изменении угла α между силами?

Ответ: 20 м/с$^2 \le a \le$ 140 м/с^2.

8. Трос, поднимая груз, наматывается на барабан с помощью электромотора (рис. 1.30). Автоматика поддерживает постоянное натяжение T троса при изменении нагрузки. Груз массой $m = 500$ кг поднимается тросом с ускорением $a = 2$ м/с^2. При увеличении массы груза на величину Δm ускорение стало вдвое меньше. Чему равна масса Δm добавочного груза?

Ответ: 90,9 кг.

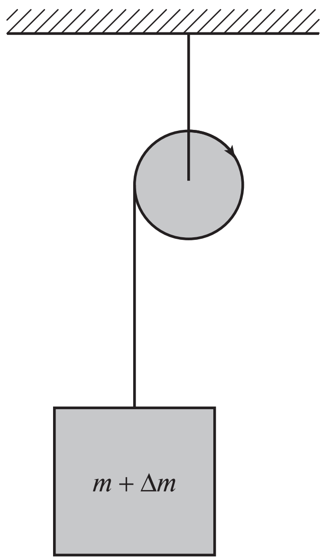

Рис. 1.30

9. Три бруска, связанные невесомыми нитями, движутся по гладкой горизонтальной поверхности с ускорением $a = 4$ м/с^2. Три динамометра измеряют натяжения нитей. Каковы показания динамометров T_1, T_2, T_3? Массы брусков указаны на рис. 1.31, массами динамометров пренебречь.

Ответ: 24 Н; 20 Н; 12 Н.

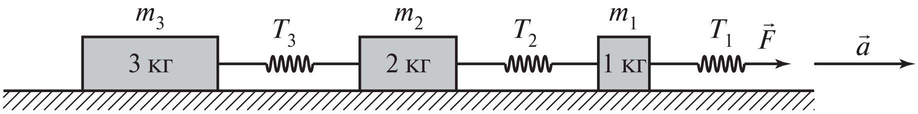

Рис. 1.31

10. Три бруска, связанные невесомыми нитями, движутся вертикально вверх с ускорением $a = 4$ м/с^2. Три динамометра измеряют натяжения нитей. Каковы показания динамометров T_1, T_2, T_3? Массы брусков указаны на рис. 1.32, массами динамометров пренебречь.

Ответ: 84 Н; 70 Н; 42 Н.

11. Лифт поднимается с постоянной скоростью и тормозит с постоянным ускорением перед остановкой на нужном этаже (рис. 1.33). Каким должно быть минимальное ускорение лифта при торможении, чтобы мяч, лежащий на полу лифта, подпрыгнул?

Ответ: $a = g$.

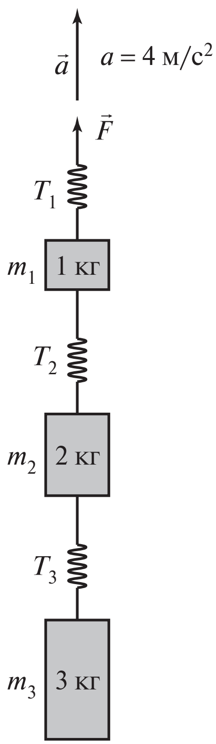

Рис. 1.32

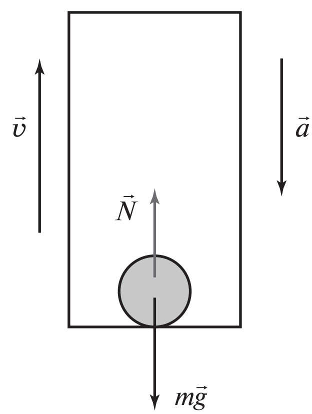

Рис. 1.33

12. Тело массой $m = 1$ кг движется по плоскости согласно кинематическим уравнениям движения $x(t) = 1 - 2t + 3t^2$, $y(t) = 3 + 2t - 4t^2$. Чему равен модуль равнодействующей сил, приложенных к телу?

Ответ: 10 Н.

13. Конус с углом при основании α и высотой H вращается с угловой частотой ω вокруг вертикальной оси, совпадающей с его осью симметрии. На поверхности конуса находится маленький брусок (рис. 1.34). На какой минимальной высоте $h_{\min}$ брусок будет неподвижен относительно конуса при коэффициенте трения о поверхность конуса, равном μ?

Ответ: $H - \dfrac{g}{\omega^2}\dfrac{\mu - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha + \mu}$.

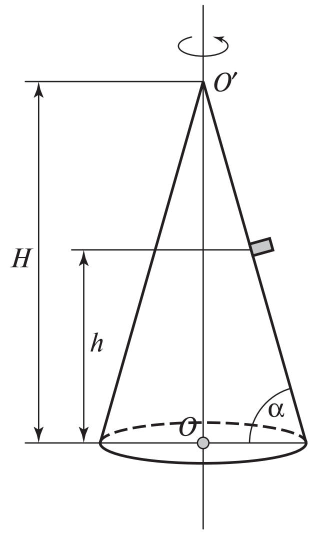

Рис. 1.34

14. Полый конус с углом при вершине $2\alpha = 60°$ вращается вокруг вертикальной оси, совпадающей с его осью симметрии, с частотой $\nu = 110$ об/мин. На гладкой внутренней поверхности конуса находится шарик, вращающийся вместе с конусом (рис. 1.35). Определить высоту h шарика относительно вершины конуса.

Ответ: 22,6 см.

15. На лабораторной работе изучают сложение сил. Установка состоит из круглого гладкого стола, на краю которого размещено 60 блоков на равных расстояниях друг от друга. Через блоки перекинуты нити с грузиками,

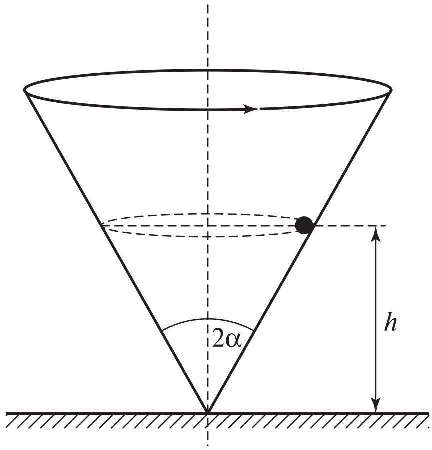

Рис. 1.35

концы нитей прикреплены к диску в центре стола симметрично на равных расстояниях друг от друга. На рис. 1.36 изображена одна из таких нитей. Чему равна равнодействующая сил, приложенных к диску со стороны нитей, и куда она направлена? Первая нить с грузиком массой m тянет диск вдоль оси x, вторая с грузиком массой $2m$ составляет угол 6° с первой, третья с грузиком массой $3m$ составляет угол 6° со второй и т.д. Нумерация нитей идет против часовой стрелки.

Ответ: $573{,}2mg$; (–93°).

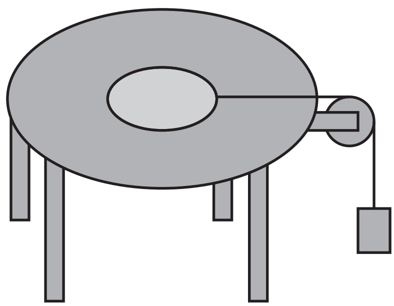

Рис. 1.36

16. Веревку длиной $2l = 1$ м и массой $2m = 250$ г положили на гладкий стол и раскрутили вокруг вертикальной оси, проходящей через один из ее концов, с частотой $\nu = 120$ об/мин (рис. 1.37). В середине веревки находится миниатюрный датчик силы (динамометр). Какую величину T натяжения веревки показывает этот датчик?

Ответ: 14,8 Н.

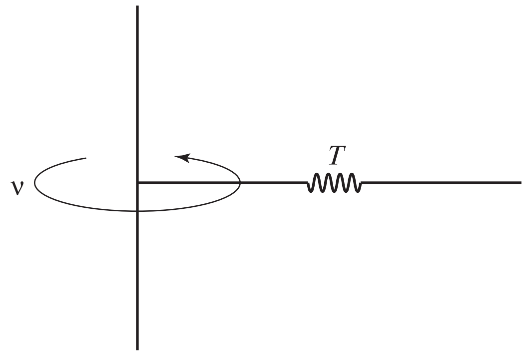

Рис. 1.37

17. Расстояние от Земли до Солнца равно $R_З = 150$ млн км, а от Юпитера до Солнца — $R_Ю = 778$ млн км. Как относятся скорости планет $\frac{v_З}{v_Ю}$ при их движении вокруг Солнца?

Ответ: 2,277.

18. Кирпич, находясь на поверхности Земли, притягивается к центру планеты с силой F_0, а на высоте h над поверхностью — с силой F_+. В шахте глубиной h кирпич притягивается с силой F_-. Найти:

а) отношение $\eta \equiv \frac{F_0 - F_+}{F_0 - F_-}$ при $h \ll R_З$;

б) при какой величине h силы F_+ и F_- равны? Радиус Земли равен $R_З = 6400$ км.

Ответ: а) 2; б) 3,955 км.

19. На экваторе некоторой планеты тела весят на 30% меньше, чем на полюсе. Продолжительность суток на этой планете $T = 2{,}4$ ч. Определить среднюю плотность ρ вещества планеты и отношение $\frac{g_э}{g_п}$ ускорения свободного падения на экваторе к ускорению свободного падения на полюсе.

Ответ: 6310 кг/м^3; 0,7.

20. С какой силой f будут притягиваться два свинцовых шара радиусами $r = 5$ см и $R = 20$ см, если в большем шаре образовать сферическую полость радиусом 10 см, касающуюся поверхности этого шара в точке, ближайшей к меньшему шару? Расстояние между центрами шаров $L = 1$ м (рис. 1.38), плотность свинца $\rho = 11\,350$ кг/м^3.

Ответ: $4{,}25 \cdot 10^{-8}$ Н.

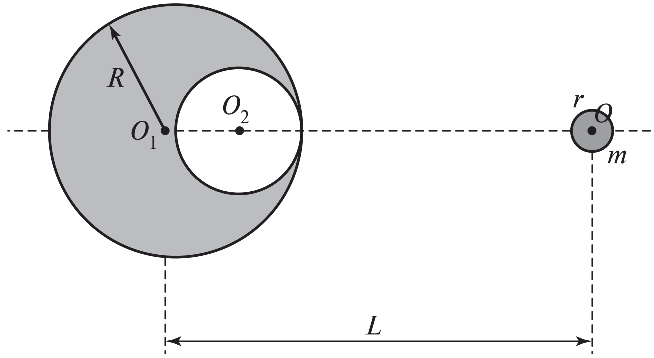

Рис. 1.38

21. При столкновении двух вагонов буферные пружины сжались на 5 см и на вагон действовала сила упругости, равная 5 кН. Во сколько раз возрастет эта сила, если сжать пружину еще на 10 см?

Ответ: 3.

22. Две пружины жесткостью $k_1 = 100$ Н/м и $k_2 = 200$ Н/м одинаковой длины соединили один раз «последовательно», другой раз — «параллельно» (рис. 1.39). Найти жесткости составных пружин $k_{посл}$ и $k_{пар}$ в этих случаях.

Ответ: 66,67 Н/м; 300 Н/м.

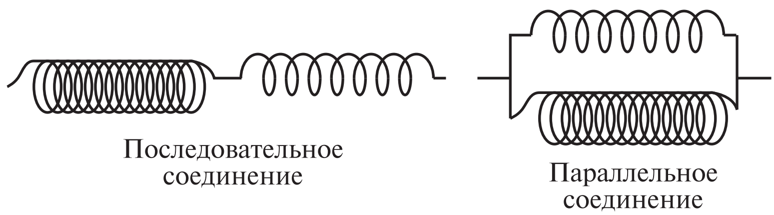

Рис. 1.39

23. Два бруска массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 200$ г, лежащие на гладком горизонтальном столе, соединены невесомой нерастяжимой нитью, почти натянутой в начальный момент. Нить выдерживает максимальное натяжение $T_{max} = 6$ Н. Какую максимальную горизонтальную силу F_{max} можно приложить к первому бруску вдоль направления нити, чтобы нить не порвалась?

Ответ: 9 Н.

24. Автомобиль на большой скорости подъезжает к повороту радиусом $R = 20$ м на горизонтальном шоссе. Зная, что коэффициент трения колес о дорогу равен $\mu = 0{,}5$, указать, до какой максимальной величины v_{max} водитель должен сбросить скорость, чтобы машину не занесло на повороте?

Ответ: 36 км/ч.

25. Значения всех величин на рис. 1.40 считаем известными. Найти натяжение T нити и ускорение a грузов.

Ответ: $\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g(1+\mu)$; $\dfrac{m_2 g - \mu m_1 g}{m_1 + m_2}$.

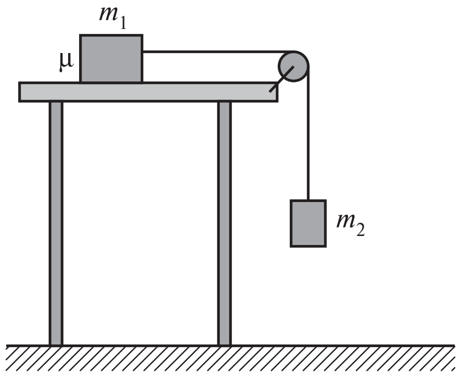

Рис. 1.40

26. Брусок массой $m_1 = 5$ кг находится на наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 30°$. С этим бруском связан невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок на вершине наклонной плоскости, другой брусок массой m_2 (рис. 1.41). Коэффициент трения между бруском массой m_1 и наклонной плоскостью равен $\mu = 0{,}4$. При каких значениях

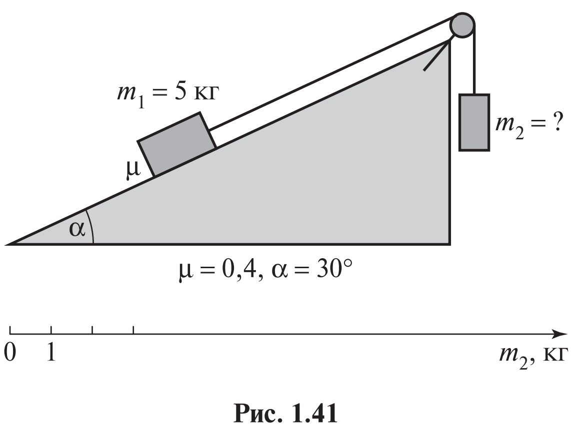

Рис. 1.41

массы m_2 система грузов остается неподвижной? Отметить эти значения массы на шкале массы.

Ответ: 0,77 кг < m_2 < 4,23 кг.

27. Куб массой $M = 8$ кг стоит на шероховатом столе. На нем расположены брусок массой $m_1 = 5$ кг и связанный с ним нитью брусок массой $m_2 = 3$ кг (рис. 1.42). Коэффициент трения между поверхностями бруска с массой m_1 и куба равен μ_1, а между кубом и столом — μ_2. В прямоугольной системе координат, на осях которой отложены величины μ_1, μ_2, изобразить схематично область параметров, при которых куб остается неподвижным.

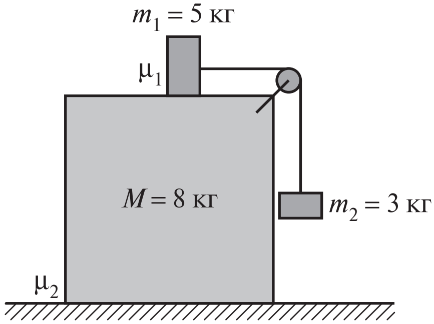

Рис. 1.42

28. Невесомый стержень, на концах которого укреплены шарики массами $m_1 = 300$ г и $m_2 = 150$ г, подвешен на спиральной пружине жесткостью $k = 40$ Н/м и длиной $l_0 = 30$ см в состоянии с нулевой деформацией (рис. 1.43). Внутри спирали проходит нить, сжимающая пружину вдвое.

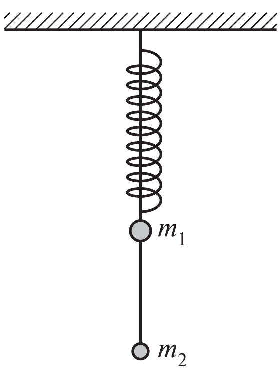

Рис. 1.43

В некоторый момент нить порвалась. С какими силами N_1, N_2 действует стержень на верхний и нижний шарики сразу после обрыва нити?

Ответ: 2 Н.

29. Невесомый стержень длиной l подвешен горизонтально на двух вертикальных нитях на его концах. Около каждой нити на расстоянии $\frac{l}{4}$ от нее к стержню прикреплены шарики массой m каждый (рис. 1.44). Внезапно правая нить обрывается. Чему равно натяжение T левой нити сразу после обрыва?

Ответ: $\frac{2mg}{5}$.

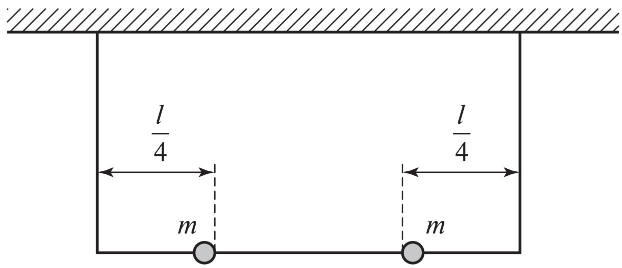

Рис. 1.44

1.2.3. Статика

1. Столб в форме усеченного конуса длиной $L = 8$ м находится в равновесии в горизонтальном положении, если точка опоры расположена на расстоянии $l = 3$ м от широкого конца (рис. 1.45, *а*). Если точку опоры сдвинуть в середину столба, то для того, чтобы столб оставался в равновесии и в этом случае, на его узкий конец нужно подвесить груз массой $m = 50$ кг (рис. 1.45, *б*). Чему равна масса M столба?

Ответ: 200 кг.

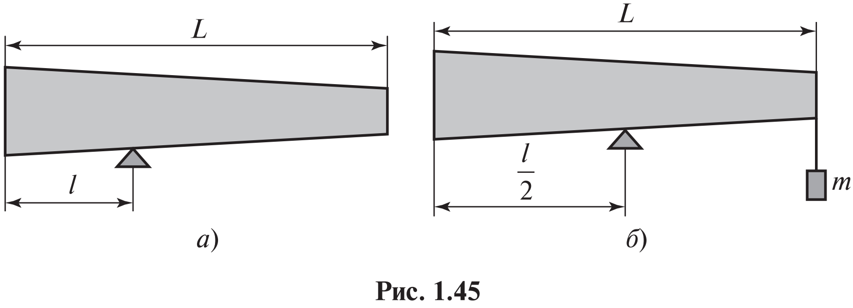

Рис. 1.45

2. Два человека несут бревно длиной $L = 5$ м и массой $m = 80$ кг, удерживая его горизонтально (рис. 1.46). Впереди идущий человек держит бревно на плече, край бревна находится на расстоянии $l = 1,5$ м от плеча. Второй человек держит бревно руками за край. Определить силы, приложенные к бревну со стороны несущих. Бревно считать однородным.

Ответ: 200 Н; 600 Н.

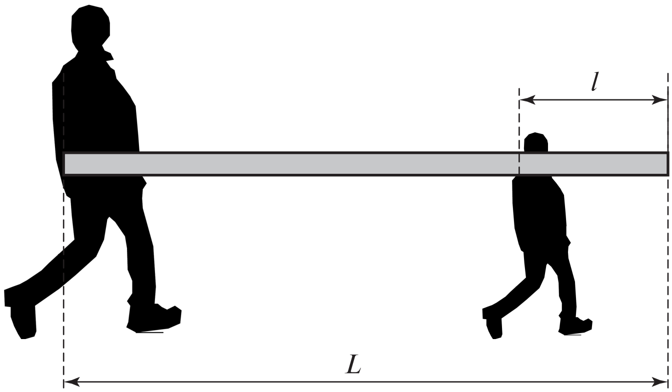

Рис. 1.46

3. Рыбак, стоя на деревянных лыжах, собирается везти стальные санки со снаряжением и уловом общей массой $M = 140$ кг, прикладывая силу к привязанной к саням веревке. Масса рыбака $m = 70$ кг. Коэффициент трения стали о снег $\mu_{ст} = 0,2$; коэффициент трения дерева по снегу $\mu_{д} = 0,3$. При каких углах между веревкой и горизонтом рыбак сможет перемещать сани?

Ответ: >29°.

4. Куб массой $m = 200$ кг с ребром длиной $a = 50$ см стоит на полу. Его боковая грань расположена параллельно соседней стене на расстоянии $d = 40$ см от нее. Куб поворачивают вокруг нижнего ребра этой грани, и он стоит, опираясь на стенку (рис. 1.47). С какой силой N куб давит на стену? При каком минимальном коэффициенте трения μ_{min} между полом и кубом такое равновесие возможно? Стену считаем гладкой.

Ответ: 332,3 Н; 0,17.

5. На одном конце легкого (невесомого) стержня длиной l закреплен шарик, а на другом — легкий отрезок тонкостенной трубки (втулка) с внутренним радиусом R. Втулку помещают на горизонтальную ось — вал электромотора радиусом чуть меньше R. Коэффициент трения между

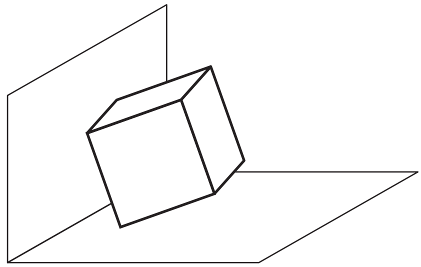

Рис. 1.47

валом электромотора и втулкой равен μ. Определить угол α отклонения стержня от вертикали в положении равновесия при вращении вала.

Ответ: $\sin\alpha = \dfrac{R}{l + R} \cdot \dfrac{\mu}{1 + \mu^2}$.

6. Показать, что центр тяжести однородного произвольного треугольника находится в точке пересечения медиан треугольника (в центроиде).

7. Однородная треугольная пластина *ABC* со сторонами *a*, *b*, *c* висит в горизонтальной плоскости на трех вертикальных нитях (рис. 1.48). Масса пластины $m = 300$ г. Найти натяжение каждой нити.

Ответ: 1 Н.

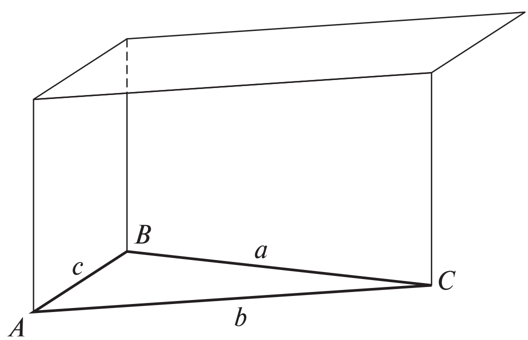

Рис. 1.48

8. Сплошной куб массой $m = 5$ кг покоится на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между кубом и горизонтальной поверхностью равен $\mu = 0{,}4$. К ребру верхней грани куба прикладывают горизонтальную силу $\vec{F}$ перпендикулярно этому ребру (рис. 1.49). При каком значении $F_{\min}$ модуля силы куб начнет поворачиваться?

Ответ: 30 Н.

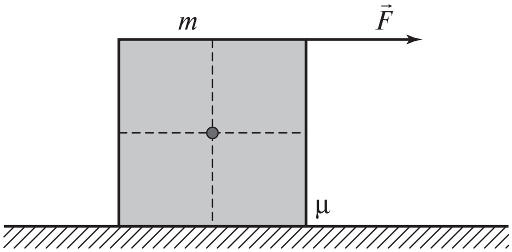

Рис. 1.49

9. Банка объемом $V = 1$ л заполнена керосином на две трети. В нее погрузили стальные болты. Керосин поднялся до верха банки, и жидкость объемом $\Delta V = 50$ мл вылилась. Чему равна масса m болтов? Плотность стали $\rho_{ст} = 7{,}8$ г/см^3.

Ответ: 3 г.

10. Куб массой $m = 2$ кг с ребром $a = 10$ см подвешен на нити и полностью погружен в воду, не касаясь дна сосуда (рис. 1.50). Чему равно натяжение нити?

Ответ: 10 Н.

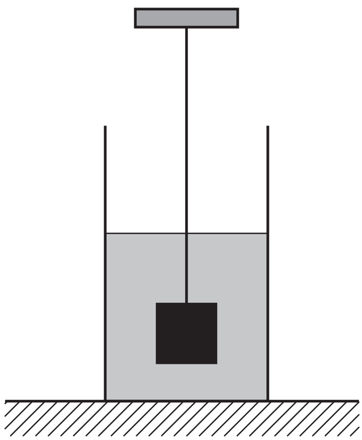

Рис. 1.50

11. Брусок плавает в жидкости, погрузившись в нее на часть объема $k_1 = 0{,}5$. Какая часть k_2 объема бруска окажется погруженной в жидкость с плотностью, в 1,5 раза большей?

Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

12. Ведро с водой находится в лифте, движущемся с ускорением $\vec{a}$, направленным вниз. Определить давление воды на дно ведра при высоте уровня жидкости в ведре, равной h.

Ответ: $\rho(g - a)h$.

13. Стеклянную трубку длиной $l = 15$ см, закрытую с одного конца, заполнили ртутью и опустили открытым концом в широкий сосуд со ртутью на небольшую глубину. Найти давление p ртути на закрытый конец трубки. Атмосферное давление $p_а = 760$ мм рт. ст.

Ответ: 745 мм рт. ст.

14. Три одинаковых бруска толщиной d каждый, связанные друг с другом, плавают в воде так, что верхний брусок чуть касается воды своим нижним основанием (рис. 1.51, *а*). Найти глубину $H_{4пог}$ погружения блока из четырех таких брусков (рис. 1.51, *б*).

Ответ: $\frac{8d}{3}$.

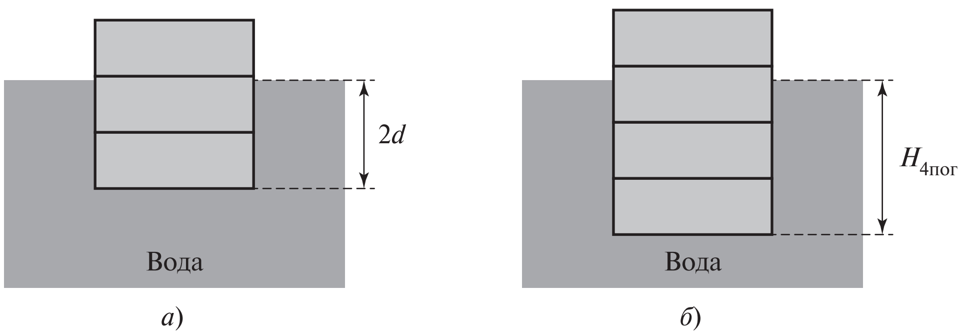

Рис. 1.51

15. Воздушный шар объемом $V = 100$ м^3 заполнен воздухом. Плотность воздуха $\rho = 1{,}29$ кг/м^3. Чему равна выталкивающая сила, действующая на шар?

Ответ: 1290 Н.

16. Три сосуда имеют одинаковую площадь дна (рис. 1.52). Дно в каждом сосуде приклеено так, что максимальная сила давления, которую выдерживает клеевое соединение, $F = 10$ Н. Сосуды стали медленно заполнять водой с одинаковой скоростью подачи воды до разрыва соединения. В каком сосуде отвалится дно раньше всех?

Ответ: Во втором.

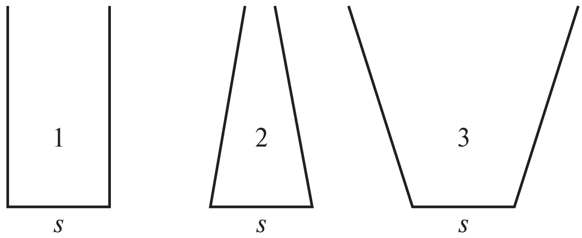

Рис. 1.52

17. В сосуд налили одинаковые объемы несмешивающихся жидкостей (рис. 1.53) и опустили в него деревянный кубик из бакаута (плотность $\rho_б = 1{,}3$ г/см^3). Длина стороны кубика a меньше, чем высота слоев жидкости h. Где окажется кубик в равновесном состоянии?

Ответ: На границе вода — ртуть.

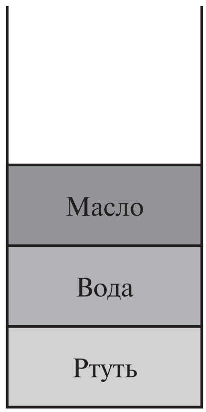

Рис. 1.53

18. Малыш сунул палец в наполовину заполненный стакан с молоком. Изменилось ли давление молока на дно стакана?

Ответ: Давление увеличилось.

19. Высота подъема воды в женевском фонтане $h = 140$ м. Площадь сечения сопла $S = 100$ см^2. Сколько воды расходует фонтан ежесекундно?

Ответ: 530 л.

20. До какой высоты H нужно налить жидкость в цилиндрический сосуд радиуса R, чтобы сила $F_{бок}$, с которой жидкость давит на боковую поверхность сосуда, была равна силе $F_{дно}$ давления жидкости на дно сосуда?

Ответ: R.

21. Аквариум наполнен доверху водой. С какой силой F вода давит на стенку аквариума? Длина стенки аквариума $L = 50$ см, высота $h = 30$ см.

Ответ: 225 Н.

22. Конический сосуд, расположенный вершиной вниз, наполнен водой. Угол при вершине конуса $2\alpha = 60°$. Масса воды в сосуде $m = 300$ г. Пренебрегая атмосферным давлением, найти силу F, с которой жидкость давит на боковую поверхность сосуда.

Ответ: 6 Н.

23. В опыте Герике в Магдебурге использовались полушария (скорее, полусферы) диаметром $D = 35{,}5$ см (рис. 1.54). Какую силу нужно приложить к полушариям, чтобы их раздвинуть, когда внутри нет воздуха? Атмосферное давление $p_а = 10^5$ Па.

Ответ: 9898 Н.

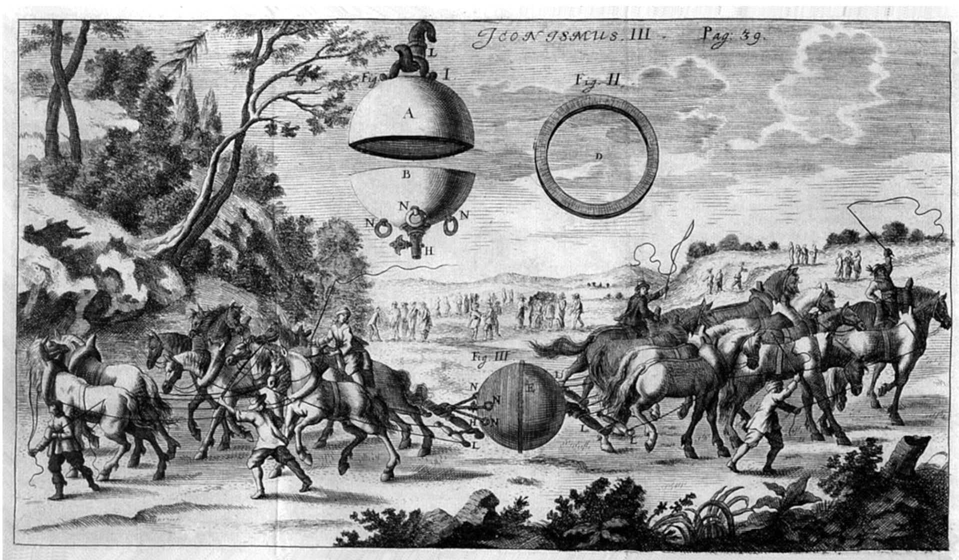

Рис. 1.54

24. Вес $P_{вод}$ однородного тела плотности ρ в воде в 3 раза меньше, чем его вес $P_{воз}$ в воздухе. Определить плотность вещества тела.

Ответ: 1500 кг/м^3.

25. Вода в проруби, пробитой далеко от берега, находится на глубине $h = 0{,}2$ м. Какова толщина льда H? Плотность льда $\rho_л = 900$ кг/м^3.

Ответ: 2 м.

26. Пираты нашли на острове небольшое озеро с пещерой на берегу и хотели спрятать там ящик с золотом. Они погрузили ящик на плот и поплыли к пещере. Не доплыв до берега, пираты увидели погоню и сбросили ящик с золотом в озеро. Изменился ли уровень воды в озере?

Ответ: Уровень понизился.

27. Небольшое тело обтекаемой формы с плотностью $\rho = 950$ кг/м^3 падает в воду с высоты $H = 10$ м. Найти, на какую максимальную глубину h тело погрузится в воду.

Ответ: 190 м.

28. Аэростат объемом $V = 2000$ м^3 заполнен водородом. Масса оболочки, сетки, корзины, балласта и прочего оборудования $m_{об} = 1600$ кг. Определить подъемную силу аэростата $F_п$, считая атмосферные условия нормальными: 0 °С и 760 мм рт. ст.

Ответ: 8200 Н.

29. Кусок сплава меди и серебра весит в воздухе, т.е. растягивает динамометр с силой $F_1 = 2{,}940$ Н, а в воде — с силой $F_2 = 2{,}646$ Н. Найти массу серебра $m_с$ и массу меди $m_м$ в куске сплава. Плотность меди $\rho_м = 8950$ кг/м^3, серебра $\rho_с = 10\,500$ кг/м^3.

Ответ: 0,209 кг; 0,085 кг.

30. Сила Архимеда (выталкивающая сила) — это результирующая сил давления, действующих на погруженное в воду тело. В случае вертикально погруженного в воду цилиндра высотой h и площадью основания S силу Архимеда просто вычислить через давление воды. Силы со стороны воды, действующие на боковую поверхность цилиндра, можно не учитывать: они компенсируют друг друга в силу симметрии задачи. На верхнее основание вода давит вниз с силой $F_в = p \cdot S$. На уровне нижнего основания давление больше, $p + \rho_{вод}gH$, и по закону Паскаля вода давит во всех направлениях одинаково, т.е. на нижнее основание она давит вверх с силой $F_н = (p + \rho_{вод}gh) \cdot S$. Результирующая сил давления на нижнее и верхнее основания цилиндра и есть сила Архимеда:

$$F_А = F_н - F_в = (p + \rho_{вод}gh) \cdot S - p \cdot S = \rho_{вод}gh \cdot S = \rho_{вод}Vg = m_{вод}g.$$

Если погруженное тело более сложной формы, например шар или кусок твердого тела неопределенной формы, провести вычисления суммарной силы давления воды сложно. Как же Архимеду удалось показать, что ответ для выталкивающей силы при произвольной форме тела такой же, как в простом случае цилиндра с вертикальной осью?

31. Сплошной однородный шар плавает на границе несмешивающихся жидкостей масла и воды, полностью погрузившись (рис. 1.55). Плотность верхней жидкости (масла) $\rho_1 = 0{,}8$ г/см^3, воды — $\rho_2 = 1$ г/см^3, плотность материала шара $\rho = 1{,}2$ г/см^3. Какая часть объема шара находится в масле?

Ответ: 0,5.

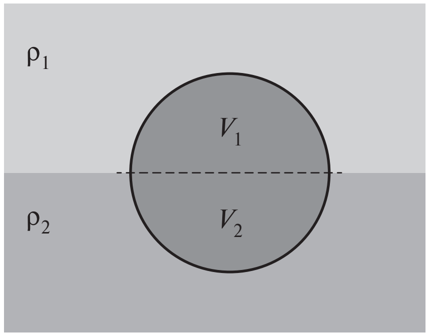

Рис. 1.55

32. В сообщающиеся сосуды налита ртуть (плотность $\rho_{рт} = 13\,600$ кг/м^3), а поверх нее в одно колено сосуда налит столб масла плотностью $\rho_м = 900$ кг/м^3 и высотой $h_м = 0{,}48$ м, в другое — столб керосина плотностью $\rho_к = 800$ кг/м^3 и высотой $h_к = 0{,}20$ м. Определить разность уровней ртути h в сосудах.

Ответ: 0,02 м.

33. На поршень шприца диаметром $d = 4$ см производится давление силой $F = 30$ Н. С какой горизонтальной скоростью v вытекает струя воды из отверстия?

Ответ: 6,9 м/с.

34. Сосуд с ртутью поставлен на легкую тележку (рис. 1.56). Сбоку в сосуде на расстоянии $h = 20$ см ниже уровня жидкости сделано отверстие площадью $S = 16$ мм^2. Найдите силу F, которая будет передвигать сосуд при вытекании ртути из отверстия. Плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см^3.

Ответ: 0,87 Н.

35. Один конец нити закреплен на дне бассейна, а второй прикреплен к пробковому поплавку (рис. 1.57). При этом $^3/_4$ всего объема поплавка погружено в воду. Определить силу натяжения нити T, если масса поплавка $m = 2$ кг и плотность пробки $\rho_п = 0{,}25$ г/см^3.

Ответ: 40 Н.

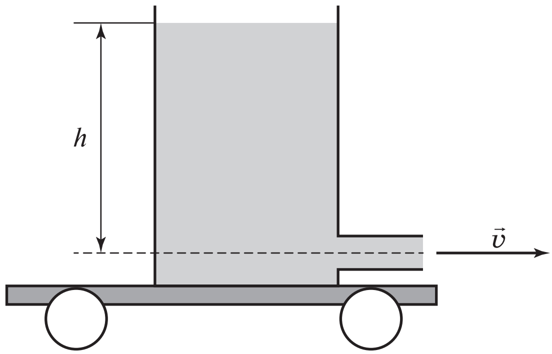

Рис. 1.56

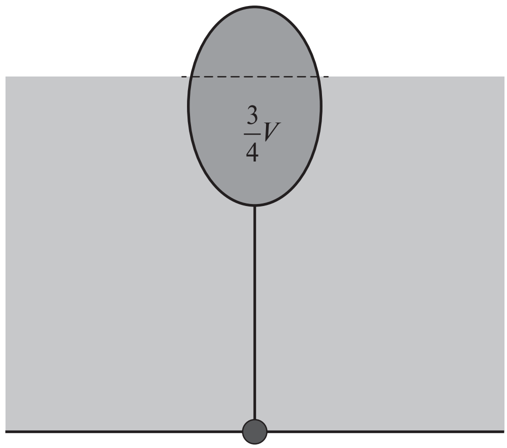

Рис. 1.57

36. Из брандспойта бьет струя воды. Расход воды $\dfrac{\Delta V}{\Delta t} = 60$ л/мин. Какова площадь S поперечного сечения струи на высоте $h = 2$ м над концом брандспойта, если вблизи него сечение струи $S_0 = 1{,}5$ см^2?

Ответ: 4,7 см^2.

37. Канал шириной $L = 50$ м перегорожен плотиной. Глубина канала по одну сторону плотины $H = 10$ м, а по другую $h < H$. Сила давления неподвижной воды на плотину $F = 4750$ кН. Чему равна глубина канала h?

Ответ: 9 м.

38. Аэростат массой $M = 1000$ кг двигался с постоянной скоростью вертикально вниз. После сбрасывания груза массой $m = 300$ кг аэростат стал двигаться с такой же скоростью вертикально вверх. Определить архимедову силу F_A, действующую на аэростат. Силу сопротивления F_c воздуха при подъеме и спуске считать одинаковой.

Ответ: 8,5 кН.

39. Тело массой $m = 2$ кг и объемом $V = 1000$ см^3 находится в озере на глубине $h = 5$ м. Какая работа A должна быть совершена при его подъеме на высоту $H = 5$ м над поверхностью воды?

Ответ: 150 Дж.

40. Алюминиевый и свинцовый шары одинакового объема подвешены на отдельных пружинных весах. Шары полностью погружены в воду. Во сколько раз отличаются показания весов? Плотность алюминия $\rho_{Al} = 2{,}7$ г/см^3, свинца — $\rho_{Pb} = 11{,}34$ г/см^3.

Ответ: 6.

41. Аэростат, наполненный гелием, развивает подъемную силу $F_1 = 10^4$ Н. Насколько увеличится подъемная сила, если заполнить этот аэростат водородом? Масса оболочки и кабины $M = 1000$ кг. Плотность воздуха $\rho = 1{,}29$ кг/м^3, водорода — $\rho_в = 0{,}09$ кг/м^3, гелия — $\rho_г = 0{,}2$ кг/м^3.

Ответ: 2018 Н.

42. Мальчик взял пудовую железную гирю и с ее помощью отмерил на рычажных весах пуд сена (1 пуд = 16 кг). Потом повторил измерения с этим сеном и той же гирей на Луне. Весы показывали разные массы. Определить эту разницу масс. Плотность сена $\rho_с = 70$ кг/м^3, железа — $\rho_ж = 7800$ кг/м^3, воздуха — $\rho_в = 1{,}29$ кг/м^3.

Ответ: 154 г.

43. Шар радиуса R закреплен на нити на дне бассейна. Верхняя точка шара A находится на уровне поверхности воды. Чему равна сила F давления воды на верхнюю половину поверхности шара? Выразить ответ через модуль силы Архимеда, действующей на шар.

Ответ: $\dfrac{F_A}{4}$.

44. Цилиндрическую цистерну для забора воды массой $m = 1200$ кг и радиусом $R = 1$ м медленно опускают в большой водоем, поддерживая ось цилиндра в вертикальном положении. Трос отцепляют, когда дно цистерны касается воды. Найти количество теплоты, которое выделится до установления равновесия.

Ответ: 2292 Дж.

45. В гладком стакане высотой $h = 10$ см и внутренним диаметром $d = 6$ см покоится пластмассовая палочка длиной $L = 14$ см, опираясь на край стакана (рис. 1.58). Когда стакан доверху наполнили водой, сила давления палочки на край стакана уменьшилась вдвое. Чему равна плотность ρ материала, из которого сделана палочка?

Ответ: 1390 кг/м^3.

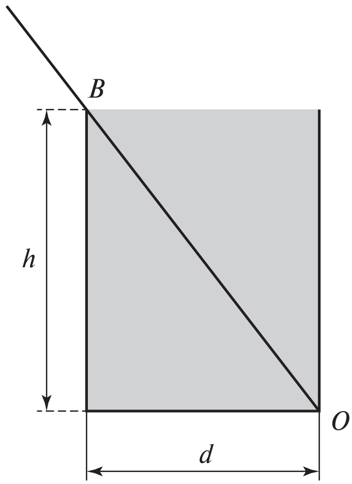

Рис. 1.58

46. В цилиндрическом стакане с водой плавает брусок высоты H_0 и сечения s (рис. 1.59). Сечение стакана $S = 3s$, начальная высота воды

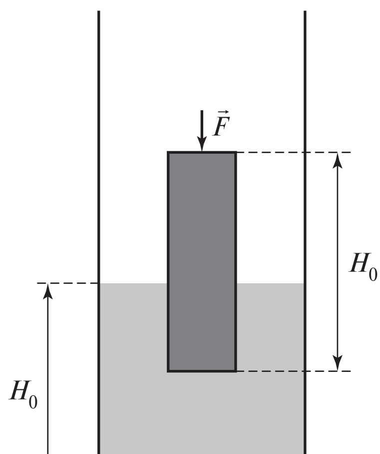

Рис. 1.59

в стакане равна высоте бруска H_0, отношение плотности ρ материала бруска к плотности воды $\frac{\rho}{\rho_в} = 0{,}4$. При помощи тонкой спицы брусок медленно опускают на дно стакана. Какая работа при этом совершена?

Ответ: $0{,}17\rho_в sgH_0^2$.

47. На дне бассейна шарнирно закреплен однородный стержень, длина которого более чем вдвое превышает глубину бассейна. Стержень погружен в воду на $^2/_3$ своей длины. Определить плотность ρ материала стержня.

Ответ: 444,4 кг/м^3.

48. Вертолет массой $M = 2000$ кг имеет лопасти винта длиной $l = 6$ м. Оценить мощность N, которую должен иметь двигатель, чтобы удержать в воздухе вертолет. Считать, что поток воздуха, созданный винтом, направлен вертикально вниз. Плотность воздуха $\rho = 1{,}29$ кг/м^3.

Ответ: 117 кВт.

1.2.4. Законы сохранения

1. Модуль импульса шарика до столкновения был p_0, а после столкновения увеличился втрое. Направление вектора скорости при столкновении изменилось на 90°. Чему равен модуль вектора изменения импульса шарика $|\Delta\vec{p}|$?

Ответ: $3{,}16p_0$.

2. Начальная скорость снаряда равна $v_0 = 600$ м/с. Снаряд вылетает под углом $\alpha = 60°$ к горизонту и через некоторое время разрывается на два осколка. Скорость одного осколка сразу после взрыва направлена вертикально вверх, а скорость другого, массой вдвое большего, образует угол $\beta = 30°$ с горизонтом. Найти скорость u второго осколка.

Ответ: 519,6 м/с.

3. Санки, съехавшие с горки, движутся по горизонтальной поверхности. Чему равен модуль изменения импульса санок, если на них в течение времени $\Delta t = 8$ с действует сила трения $F = 30$ Н?

Ответ: 240 кг·м/с.

4. Камень массой m брошен вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Насколько изменился его импульс за время полета?

Ответ: $2mv_0$.

5. Мальчик массой $M = 60$ кг, стоя на гладком льду, бросает груз массой $m = 10$ кг под углом $\alpha = 60°$ к горизонту со скоростью $v = 6$ м/с относительно земли. Какую скорость u приобретает мальчик?

Ответ: 0,5 м/с.

6. Шарик массой $m = 20$ г подлетает к столу под углом $\alpha = 30°$ (α — острый угол между линией вектора скорости и линией нормали к поверхности стола) со скоростью $\vec{v}_0$. После короткого абсолютно упругого взаимодействия со столом шарик удаляется от него со скоростью $\vec{v}_1$, составляющей угол β с нормалью. Модуль вектора скорости шарика в процессе взаимодействия со столом не изменяется $v_1 = v_0 \equiv v = 10$ м/с.

А. Показать, что угол β «отражения» шарика равен углу падения α;

Б. Определить направление и модуль вектора изменения импульса шарика $\Delta\vec{p} \equiv \vec{p}_1 - \vec{p}_0$.

Ответ: 0,35 кг·м/с; по нормали.

7. Небольшой шарик подлетает сверху к горизонтальной плите под углом $\alpha = 30°$ к нормали со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Плита движется вертикально вверх со скоростью $u = 4$ м/с. После короткого абсолютно упругого взаимодействия с плитой шарик удаляется от нее. Найти модуль и направление вектора скорости $\vec{v}_1$ шарика после удара о плиту.

Ответ: 17,4 м; 16,7°.

8. Джип 4×4 (все колеса ведущие) массой $m = 2000$ кг разгоняется из состояния покоя до скорости $v = 100$ км/ч. Коэффициент трения колес автомобиля по асфальту $\mu = 0{,}4$:

А. Каково минимальное время τ разгона?

Б. Какой импульс p и какую кинетическую энергию $E_{кин}$ приобретает автомобиль за это время?

В. Какая сила F создала импульс автомобиля?

Г. Чему равна работа этой силы?

Ответ: 7 с; $5{,}5 \cdot 10^4$ кг·м/с; 0.

9. Шайбы массами m_1 и m_2 движутся навстречу друг другу со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ по гладкой горизонтальной поверхности. Найти скорости $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ шайб после абсолютно упругого центрального столкновения. Массы шайб и их начальные скорости связаны соотношением $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0$.

Ответ: $u_{1x} = -v_{1x}$; $u_{2x} = -v_{2x}$.

10. Шайбы массами m_1 и m_2 движутся навстречу друг другу со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ по гладкой горизонтальной поверхности. Найти скорости $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ шайб после абсолютно упругого центрального столкновения.

Ответ: $\vec{u}_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$; $\vec{u}_2 = \dfrac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}$.

11. Длина ствола орудия $l = 4{,}2$ м. Снаряд массой $m = 50$ кг вылетает из орудия со скоростью $v = 550$ м/с. Какую среднюю мощность N развивает сила, выталкивающая снаряд?

Ответ: 500 МВт.

12. Ночью потребление электроэнергии меньше, чем днем. На гидроаккумулирующих станциях, используя ночной избыток энергии, закачивают воду в бассейн, расположенный на некоторой высоте, а днем вода, вытекая из бассейна, вращает генераторы и производит электроэнергию (рис. 1.60). Определить мощность P, отдаваемую гидроаккумулирующей станцией, если объем закачиваемой воды $V = 22$ млн м^3, высота подъема воды $H = 8$ м и вода расходуется в течение времени $\Delta t = 5$ ч.

Ответ: 100 МВт.

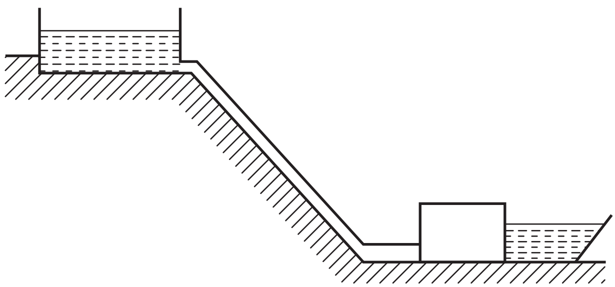

Рис. 1.60

13. Тягач перемещает вязанку бревен со скоростью $v = 10$ км/ч, развивая силу тяги $F = 15$ кН. Чему равна мощность N тягача при этой работе?

Ответ: 42 кВт.

14. Тело массой $m = 200$ г движется вдоль оси x так, что проекция его скорости изменяется со временем согласно уравнению $v_x = 5 - 3t$ (в системе СИ). Найти кинетическую энергию тела спустя время $t = 3$ с после начала движения.

Ответ: 1,6 Дж.

15. Спутник массой $m = 1$ т выведен на круговую орбиту вблизи Земли.

А. Какую работу A совершил двигатель ракеты?

Б. За какое время T спутник сделает один оборот вокруг Земли?

В. Какую работу A_G совершит гравитационная сила за время одного оборота?

Ответ: 32 000 МДж; 1,4 ч; 0.

16. Нить с шариком на одном конце привязали вторым концом к крючку на потолке, отклонили на 90° от вертикали и отпустили шарик без толчка (рис. 1.61). Какой угол α составляет нить с вертикалью в точке траектории шарика, где его ускорение направлено горизонтально?

Ответ: 54,74°.

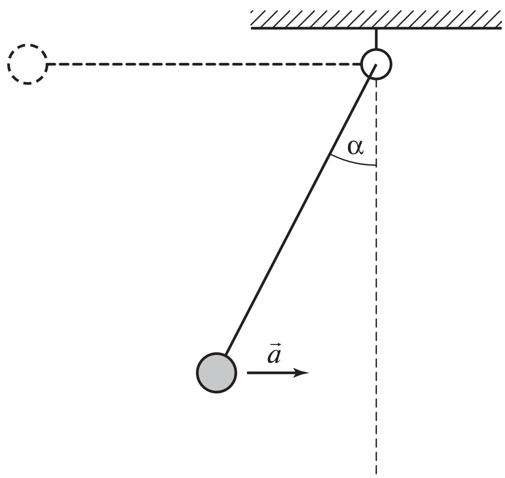

Рис. 1.61

17. Шарик подлетает сверху к абсолютно гладкому горизонтальному столу. Угол между вектором скорости $\vec{v}_0$ шарика и вертикалью $\alpha = 30°$. Происходит неупругий удар шарика о поверхность стола, и шарик отскакивает, потеряв половину имевшейся до удара кинетической энергии. Каков угол β между вектором скорости $\vec{v}_1$ шарика после столкновения и вертикалью?

Ответ: 45°.

18. Шар радиусом r висит на длинной нити на высоте $H \gg r$ над землей. На него налетает точно такой же шар, движущейся со скоростью $v_0 = 10$ м/с (рис. 1.62). Центр налетающего шара выше, чем центр неподвижного, на величину $h = 0{,}75r$. Происходит нецентральный упругий удар. На каком расстоянии по горизонтали от места столкновения налетевший шар упадет на землю, если известно, что высота $H = 2$ м?

Ответ: 0,83 м.

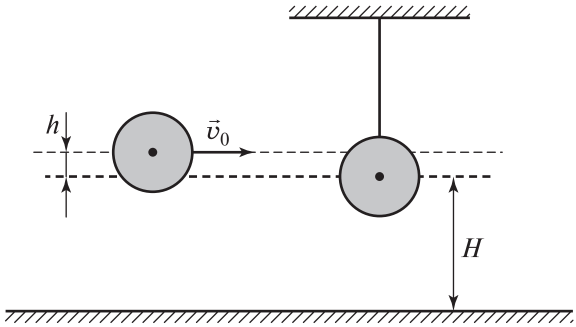

Рис. 1.62

19. На оси x, проведенной на гладкой горизонтальной поверхности, находятся три шайбы. Левой шайбе сообщают горизонтальную скорость $v = 7$ м/с вдоль оси x. Происходят упругие центральные столкновения шайб. Массы крайних шайб указаны на рис. 1.63.

А. Какую массу μ должна иметь средняя шайба, чтобы скорость $u(\mu)$ правой шайбы после столкновения оказалась максимальной?

Б. Чему равна эта максимальная скорость $u_{\max}$?

Ответ: 300 г; 5,14 м/с.

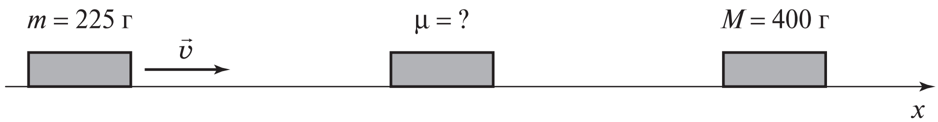

Рис. 1.63

20. Тело массой m подняли на большую (сравнимую с радиусом Земли $R_З$) высоту h над землей. Какую работу совершила поднимающая сила?

Ответ: $\dfrac{mghR_З}{R_З + h}$.

21. Лунтик у себя на Луне выстрелил из рогатки вертикально вверх, и камень поднялся на высоту $h = 0{,}7R_{\text{Луны}}$. Лунтик растянул рогатку сильней, и второй камень поднялся в 10 раз выше. Во сколько раз растяжение резины в рогатке было больше при втором выстреле Лунтика?

Ответ: 2,125.

22. На время ремонта поперек шоссе положили балку массой m и длиной l во всю ширину шоссе. По окончании ремонта к концу балки привязали веревку и перетащили ее на обочину. Найти работу, затраченную на перемещение балки, если коэффициент трения балки на асфальте μ, а на обочине — в 1,5 раза больше. Балка перемещается поступательно.

Ответ: $\frac{5\mu mgl}{4}$.

23. На вершину гладкой полусферы радиусом 0,5 м положили небольшую шайбу. Равновесие неустойчивое, и шайба начинает соскальзывать со сферы. На какой высоте h она оторвется от сферы?

Ответ: $\frac{R}{3}$.

24. Тонкий обруч массой m катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности со скоростью $\vec{v}$. Найти кинетическую энергию $E_к$ обруча.

Ответ: mv^2.

25. С вершины полусферы радиуса R скатывается без проскальзывания обруч радиусом r (рис. 1.64). На какой высоте он оторвется от полусферы?

Ответ: $\frac{R+r}{2}$.

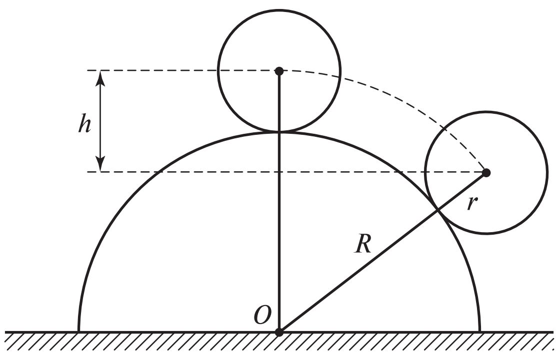

Рис. 1.64

26. Снаряд вылетает из орудия под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. В момент, когда вектор скорости снаряда направлен горизонтально, происходит разрыв снаряда на два осколка. Меньший осколок падает на землю рядом с орудием. Второй осколок, в 3 раза больший по массе, падает на землю на расстоянии $L = 8$ км от орудия. Найти скорость v_0 снаряда сразу после выстрела.

Ответ: 263 м/с.

27. Баржа плыла под мостом со скоростью $u = 6$ м/с, когда на нее с моста плавно опустили мешок с цементом. Мешок заскользил по палубе и оставил след длиной $s = 3$ м. Второй мешок при спуске сорвался и упал на палубу. С какой минимальной высоты h сорвался мешок, если он не скользил и не оставил следа?

Ответ: 5 м.

28. На гладком полу лежит доска длиной $L = 1{,}5$ м и массой $M = 3$ кг. На краю доски сидит кот массой $m = 3$ кг. Какую минимальную работу $A_{\min}$ должен совершить кот при прыжке, чтобы достичь второго края доски?

Ответ: 15,75 Дж.

29. Две шайбы массами $m = 0{,}01$ кг и $M = 0{,}05$ кг связаны пружиной жесткости $k = 30$ Н/м и длиной $l_0 = 18$ см. Пружина сжата в начальный момент на величину Δ. Шайба массой m находится на горизонтальной поверхности (рис. 1.65). Нить пережигают.

А. При какой максимальной длине l нити она не провисает при начальном сжатии?

Б. При каком минимальном начальном сжатии пружины $\Delta_{\text{отр}}$ после пережигания нити произойдет отрыв нижней шайбы от поверхности?

Ответ: 16,33 см; 3,67 см.

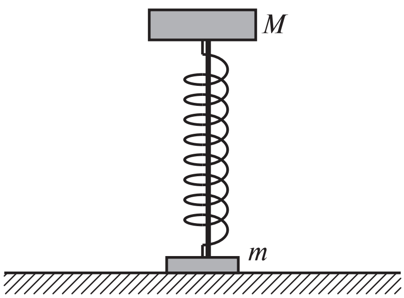

Рис. 1.65

30. В устройстве «оптический пинцет» частицы микронного и меньшего масштаба перемещаются под действием силы, действующей на них со стороны излучения лазера. Пусть размер частицы $d = 1$ мкм, а ее плотность $\rho = 1000$ кг/м^3. Частица взвешена в жидкости и при попадании на нее света сдвигается за время $t = 1$ с на расстояние $l = 1$ мм. Оценить мощность лазера, если известно, что он испускает фотоны, каждый из которых несет импульс $p_\text{ф} = 10^{-27}$ кг·м/с и энергию $\varepsilon_\text{ф} = 3 \cdot 10^{-19}$ Дж. Сечение луча лазера $S = 1$ мм^2, фотон отдает весь импульс частице.

Ответ: 0,3 мВт.

1.2.5. Механические колебания и волны

1. Движение тела описывается уравнением $x(t) = a\sin\left(bt + \dfrac{\pi}{3}\right)$, где $a = 10$ см, $b = 5$ 1/с. Чему равны частота ν, амплитуда x_m, начальная фаза φ_0 колебаний?

Ответ: $\dfrac{5}{2}\pi$ Гц; 0,1 м; $\dfrac{\pi}{3}$.

2. Тело совершает гармонические колебания по закону $x(t) = x_m \cos\omega t$ с периодом $T = 20$ с и амплитудой $x_m = 50$ см.

А. Какой путь прошло тело за первую секунду, вторую секунду, третью секунду?

Б. Какой путь прошло тело за первые 5 с, вторые 5 с, третьи 5 с?

В. Какой путь прошло тело за 40 с?

Ответ: 2,45 см, 7,1 см, 11,06 см; 50 см; В. 4 м.

3. Две небольшие шайбы находятся на внутренней поверхности гладкой полусферы в точках, симметричных относительно вертикальной плоскости, проходящей через центр полусферы. На линии, соединяющей шайбы, на одинаковом расстоянии от них находится маленький мячик (рис. 1.66). Все три тела одновременно начинают движение к нижней точке A полусферы, и мячик долетает до нее за время $t_м = 1$ с. Какое время $t_ш$ двигались шайбы до точки A? Угол $\alpha = 10°$.

Ответ: 9 с.

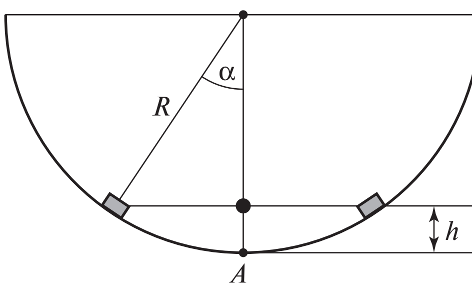

Рис. 1.66

4. Два одинаковых колеса быстро вращаются в противоположных направлениях с одинаковой угловой скоростью. На колеса положили планку так, что середина планки (точка O) оказалась ближе к правому колесу, чем к левому. Оси колес, перпендикулярные плоскости рис. 1.67, находятся на одной высоте, расстояние между осями $2l = 20$ см, коэффи-

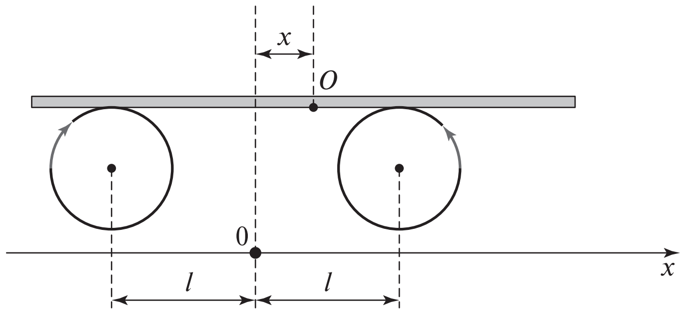

Рис. 1.67

циент трения между планкой и колесами $\mu = 0{,}3$. Найти период колебаний планки.

Ответ: 1,15 с.

5. Шарик массой $m = 0{,}1$ кг осторожно, без толчка, присоединяют к концу висящей спиральной легкой пружины жесткости $k = 20$ Н/м и отпускают. Найти координату $x(t)$ шарика при $t = 1{,}4$ с, отсчитывая время от момента присоединения шарика к пружине. Вертикальная ось x направлена вниз, начало оси в точке, где шарик присоединили к пружине.

Ответ: 2,1 см.

6. Груз массой $m = 0{,}5$ кг падает без начальной скорости с высоты $h = 2$ м на длинную недеформированную спиральную пружину жесткости $k = 50$ Н/м, закрепленную на полу. Скорость шарика направлена по оси пружины. Найти величину $x_{\max}$ максимальной деформации пружины в результате падения груза и время t, в течение которого происходило сжатие. Массой пружины и силами сопротивления пренебречь.

Ответ: 93,4 см; 0,173 с.

7. Кожух массой $m_1 = 1$ кг стоит на горизонтальной поверхности. Внутри кожуха на двух одинаковых пружинах жесткости $k = 100$ Н/м симметрично закреплен брусок массой $m_2 = 200$ г (рис. 1.68). Коэффициент трения между кожухом и горизонтальной поверхностью $\mu = 0{,}3$, между бруском и кожухом трения нет. При какой амплитуде x_m колебаний бруска кожух сдвинется с места?

Ответ: 1,8 см.

8. Невесомый резиновый шнур длиной $l_0 = 20$ см и жесткостью $k = 60$ Н/м натянули между двумя опорами, отстоящими друг от друга на расстоянии $L = 30$ см. К середине шнура прикрепили шарик массы $m = 50$ г (рис. 1.69). С какой частотой ν будет колебаться шарик, если его

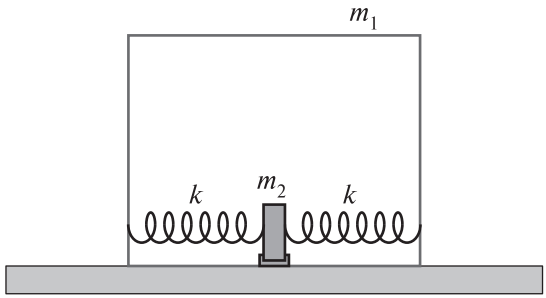

Рис. 1.68

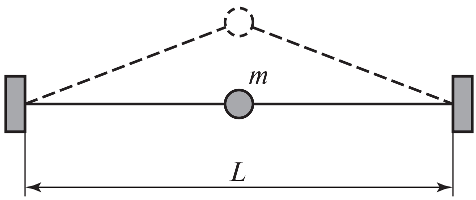

Рис. 1.69

отвести от положения равновесия в направлении, перпендикулярном шнуру, на небольшое расстояние? Силу тяжести не учитывать.

Ответ: 6,4 Гц.

9. Нитяной маятник представляет собой шарик массой $m = 5$ г с положительным зарядом $q = 20$ нКл, подвешенный на нити длиной $l = 80$ см. Нить привязана к длинному гвоздю, вбитому в стену. Шарик совершает малые колебания в однородном вертикальном электрическом поле с вектором напряженности, направленным вверх и равным по модулю $E = 3 \cdot 10^6$ В/м. Найти частоту ω колебаний маятника.

Ответ: 1,58 1/с.

10. Может ли маятник с заряженным шариком, рассмотренный в предыдущей задаче, при какой-то напряженности поля $E \neq 0$ иметь частоту колебаний $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ (как маятник с незаряженным шариком)?

Ответ: Может, при $E = 5 \cdot 10^6$ В/м.

11. Маятник представляет собой невесомый стержень длиной l с небольшим по размеру грузом массой m на одном конце (рис. 1.70). Второй конец стержня шарнирно закреплен у потолка на оси O. На расстоянии $\dfrac{2l}{3}$ от оси в точке A к стержню прикреплена спиральная пружина жестко-

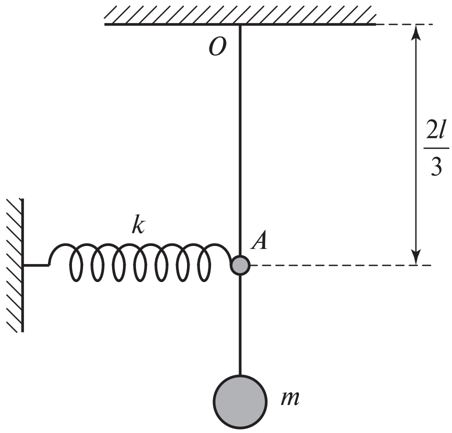

Рис. 1.70

стью k с горизонтальной осью симметрии. Второй конец пружины закреплен таким образом, что при вертикальном положении стержня пружина не деформирована. Стержень отклоняют от вертикали на малый угол φ и отпускают, возникают колебания. Найти их циклическую частоту Ω.

Ответ: $\frac{g}{l} + \frac{4k}{9m}$.

12. На горизонтальном полу стоит шкаф массой $M = 100$ кг. Коэффициент трения между шкафом и полом $\mu = 0{,}6$. К шкафу присоединяют невесомую пружину жесткости k и прикрепленный к ней брусок массой m, как показано на рис. 1.71. Какую минимальную постоянную горизонтальную силу F нужно приложить к бруску, чтобы сдвинуть шкаф? Трения между бруском и полом нет.

Ответ: 300 Н.

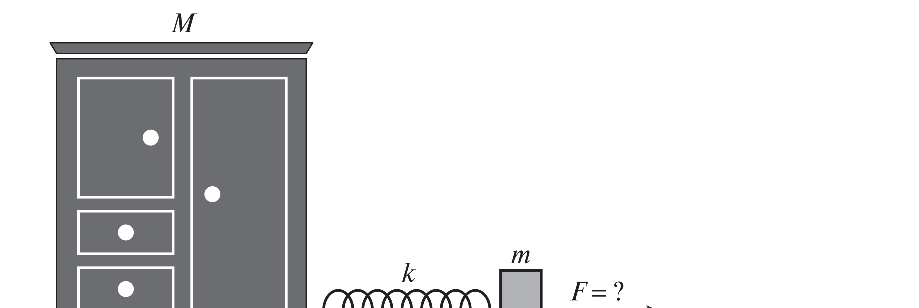

Рис. 1.71

13. Математический маятник с грузиком массой m и длиной нити l установлен на штативе массой M. Штатив может перемещаться по гладкой горизонтальной поверхности. Найти период T колебаний системы.

Ответ: $2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}\cdot\sqrt{\dfrac{M}{M+m}}$.

14. Шарик массой m с зарядом q подвешен на шелковой нити длиной l. В начальный момент включают однородное горизонтальное электрическое поле напряженности E. Через некоторое время нить с шариком занимает новое равновесное положение.

А. Найти угол между нитью в этом положении и вертикалью.

Б. Определить частоту малых колебаний около нового положения равновесия. Отношение параметров $\dfrac{qE}{mg} = 1$.

Ответ: $45°$; $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{\dfrac{g}{l}}$.

15. Гидролокатор сторожевого катера работает на частоте $\nu = 15$ кГц. Сигнал, посланный в направлении подводной лодки, находящейся на расстоянии $s = 4{,}5$ км от катера, вернулся через $t = 6$ с. Чему равна длина рабочей звуковой волны λ локатора?

Ответ: 10 см.

16. Стандартная частота камертона $\nu = 440$ Гц. Чему равна длина волны λ, возбуждаемой камертоном в воздухе? Скорость звука в воздухе $c = 330$ м/с.

Ответ: 0,75 м.

17. Для экспериментальной оценки скорости звука в атмосфере испытатель ударил молоточком по металлическому листу и стал ждать эха от стены дома, расположенного на расстоянии $s = 50$ м от испытателя. Время фиксировал секундомер, автоматически включающийся при ударе молоточком и выключающийся в момент прихода эха. На экране секундомера высветился результат измерения времени — $\tau = 0{,}30$ с. Чему равна скорость звука, согласно этому эксперименту?

Ответ: 333 м/с.

18. Звуковая волна распространяется вдоль оси x. В некоторый момент времени фаза колебаний в начале координат $\varphi_0 = 0$. Чему, следуя рис. 1.72, равна фаза φ_A колебаний в точке A в этот момент времени?

Ответ: 3π.

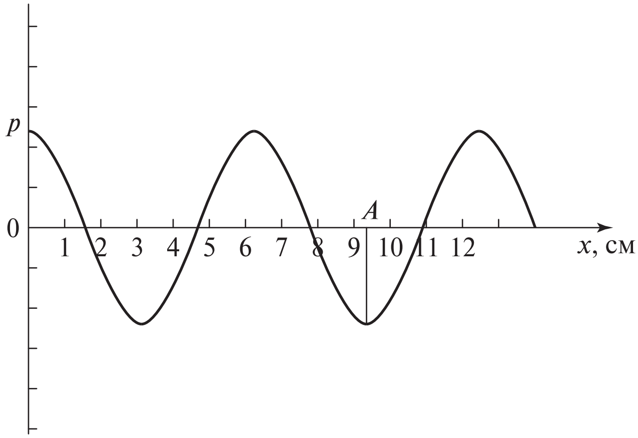

Рис. 1.72

19. Мужскому голосу басу соответствуют частоты от нижней $\nu_н = 75$ Гц до верхней $\nu_в = 330$ Гц. Чему равно отношение $\frac{\lambda_н}{\lambda_в}$ длин звуковых волн, соответствующих верхней и нижней частотам этого интервала?

Ответ: 4,4.

20. Пловец нырнул с лодки и слышит под водой музыку из радиоприемника на лодке. Как изменяются при переходе звука из воздуха в воду параметры звуковой волны: длина волны λ, частота ν, скорость звука c? Ответьте на вопросы, заполнив пустые поля в таблице, используя слова: 1) не изменяется, 2) увеличивается, 3) уменьшается.

Длина звуковой волны λ	**Частота ν**	**Скорость звука c**

Ответ: 2); 1); 2).

21. Две плоские звуковые волны одинаковой частоты $\nu = 2$ кГц распространяются навстречу друг другу вдоль оси x. Расстояние между ближайшими точками, в которых амплитуда колебаний минимальна, $\Delta x = 8{,}2$ см. Чему равна скорость c звуковой волны?

Ответ: 328 м/с.

22. Колебания в среде распространяются со скоростью $\upsilon = 300$ м/с. Период колебаний $T = 0{,}04$ с. Найти разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний в точках, отстоящих от источника волн на расстояния $x_1 = 10$ м и $x_2 = 16$ м.

Ответ: π.

23. Два одинаковых динамика, подключенных к одному выходу генератора звуковой частоты $\nu = 3$ кГц, расположены на расстоянии $d = 10$ м друг от друга (рис. 1.73). При перемещении из точки A, отстоящей на одинаковое расстояние от динамиков, по прямой AB, параллельной линии, соединяющей динамики, громкость звука сначала уменьшается, а в точке B становится почти такой же, как в точке A. Чему равно время τ_1, за которое звук распространяется от первого динамика до точки B? Кратчайший путь от первого динамика до прямой AB проходит через B. Скорость звука в воздухе 330 м/с.

Ответ: 1,4 с.

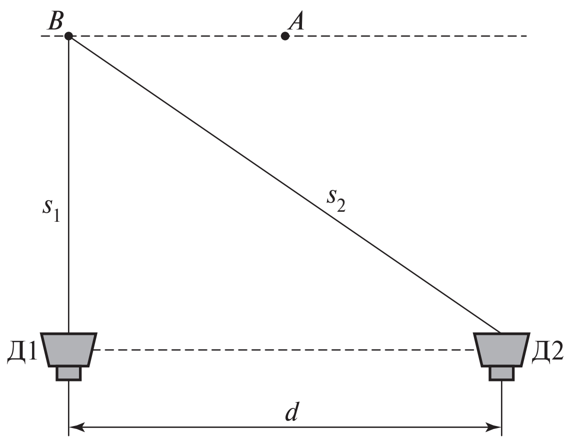

Рис. 1.73

24. Самолет летит на высоте $h = 5$ км со сверзвуковой скоростью. Звук дошел до наблюдателя через время $\tau = 10$ с после того, как над ним пролетел самолет. Определить скорость υ самолета. Скорость звука в воздухе $c = 330$ м/с.

Ответ: 439 м/с.

25. С авианосца, движущегося со скоростью $\upsilon_а = 60$ км/ч навстречу эсминцу, посылается по воде ультразвуковой сигнал частотой $\nu_0 = 60$ кГц. Отраженный от эсминца сигнал принимается на авианосце с частотой $\nu_1 = 63$ кГц. Определить скорость $\upsilon_э$ эсминца. Скорость ультразвука в воде $c = 1,5$ км/с.

Ответ: 19,9 м/с.

26. Две шайбы массами $m = 0,01$ кг и $M = 0,05$ кг связаны пружиной жесткости $k = 30$ Н/м и длиной $l_0 = 18$ см. Пружина сжата в начальный момент на величину Δ. Шайба массой m находится на горизонтальной поверхности (рис. 1.74). Нить пережигают.

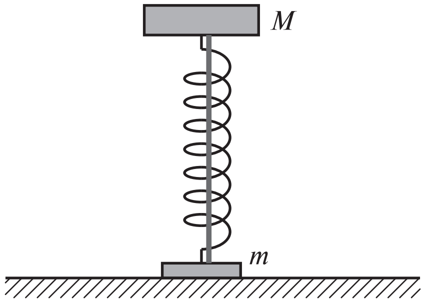

Рис. 1.74

А. Какое время τ пройдет от момента пережигания нити до момента отрыва нижней шайбы от поверхности при минимальной деформации $\Delta_{отр}$?

Б. Чему равна высота $h(t)$ верхней шайбы над горизонтальной поверхностью через время t после обрыва нити при начальной деформация пружины $\Delta < \Delta_{отр}$?

Ответ: 128,25 мс; $\left(\frac{49}{3} - \frac{25}{3}\right)\cos(24{,}5t)$ см.

1.3. Указания к решению задач

1.3.1. Кинематика

1. Представить, что это вы приняли звонок, и подумать, какой вопрос возник бы у вас, когда прервалась связь. «Перевести» этот бытовой вопрос на язык кинематики.

2. Относительно вагона и мальчика в вагоне начальная скорость телефона равна нулю, а по отношению к платформе равна скорости поезда. Поэтому траектории в двух системах отсчета будут разные (1.1.1.7).

3. Наблюдатель, находящийся в любой системе отсчета, ту систему, относительно которой он покоится, считает неподвижной (себя тоже считает неподвижным).

4. Вспомнить законы Кеплера (1.1.2.6).

5. Спутник «висит», т.е. его положение по отношению к точке A и системе отсчета xyz не изменяется. Относительно системы отсчета XYZ спутник движется по круговой орбите в плоскости экватора с центром в центре Земли.

6. Использовать правило сложения векторов и теорему Пифагора (см. введение «Векторы в физике»).

7. Принять за начало отсчета точку O — центр Земли, нарисовать траекторию спутника и по заданной длине дуги окружности определить угол поворота радиуса-вектора спутника. Использовать определение вектора перемещения (1.1.1.2).

8. Сделать рисунок, указать на нем участки пути и искомый вектор перемещения. Расчет провести, используя определение понятий «путь», «перемещение» (1.1.1.2) и геометрию.

9. Использовать формулу для средней скорости по определению (1.1.1.3).

10. Использовать формулу для средней скорости по определению (1.1.1.3).

11. Изобразить на рисунке схему перемещения автомобиля. Использовать определения средней скорости и средней путевой скорости (1.1.1.3).

12. Изобразить на одном чертеже график движения велосипедиста и графики всех автобусов, которых он может встретить. Пересчитать на рисунке точки встреч.

13. Полезно представить большой плот шириной от берега до берега, перемещающийся по реке вместе с водой. Плот удобен тем, что он твердый и можно вообразить, что на нем нарисованы линии, перпендикулярные вектору скорости воды. Мальчик в такой модели не переплывает речку, а переходит на другой берег по движущемуся, как вода, плоту, ориентируясь по нарисованным линиям. Использовать теорему сложения скоростей в векторном виде (1.1.1.3).

14. Посмотреть на ситуацию глазами водителя автобуса. Он считает себя неподвижным и следит за девочкой. От направления вектора скорости девочки зависит положение точки на дороге, куда она прибежит. Нужно, чтобы эта точка была перед автобусом и как можно дальше от него. Использовать закон сложения скоростей (1.1.1.3).

15. Ввести расстояние L между аэропортами, считая, что самолет летит относительно земли по одной и той же прямой с ветром и без ветра. Без ветра скорость самолета относительно земли и относительно воздуха одинаковая, равная v. При ветре $\vec{v}$ эта скорость только относительно воздуха, а относительно земли добавляется вектор скорости ветра. Использовать теорему сложения скоростей (1.1.1.3).

16. Нарисовать эскиз, изобразив траекторию лодки относительно берега и векторы скорости относительно воды на прямом и обратном пути. Модули v векторов одинаковые, и угол φ между вектором скорости и траекторией лодки одинаковый на прямом и обратном пути. Одно уравнение, связывающее эти величины, даст теорема синусов, второе — выражение для заданного времени. Применить закон сложения скоростей (1.1.1.3).

17. Использовать определение ускорения (1.1.1.4).

18. Использовать определение среднего ускорения (1.1.1.4).

19. Использовать формулы, описывающие зависимости радиуса-вектора и вектора скорости от времени при движении с постоянным ускорением (1.1.1.4).

20. На интервале времени $0 < t < 2t_0$ использовать формулы для проекции скорости и координаты при равноускоренном движении с проекцией ускорения $a_{x1} = -a_0$ (1.1.1.6). Начальные скорость и координата для этого интервала равны нулю по условию. На втором интервале времени проекция ускорения $a_{x2} = 2a_0$, начальные скорость и координата для этого интервала отличны от нуля и равны конечным значениям этих величин на первом интервале времени.

21. Особенность этой задачи в том, что в ней отсчет времени, за которое проводится усреднение скорости, начинается, когда автомобиль еще стоит. Вычислить время, когда тронется автомобиль с бóльшим номером, найти время, через которое он доедет до шлагбаума, и поделить путь на это время. При расчетах слагаемые, не содержащие множителем большое число n, опустить. Использовать определение средней скорости (1.1.1.3).

22. Использовать кинематическое уравнение движения с постоянной скоростью (1.1.1.5).

23. Задачи такого типа можно встретить и в задачниках по алгебре и арифметике. Нужно ввести величины, относящиеся к сценарию задачи, не слишком задумываясь на первом этапе, что дано, а что надо найти. Имея обозначения величин, можно перевести на язык алгебры условие задачи, т.е. составить уравнения, отражающие условия, а затем решить их. «Лишние» величины, т.е. не заданные в условии, не войдут в ответ.

24. Сравнить расстояния, которые пролетают от Релпода до халифа n-й голубь и следующий за ним.

25. Удобно использовать формулу, связывающую пройденный путь, скорость и ускорение и не содержащую время (1.1.1.4).

26. По заданному изменению скорости на последнем километре определить ускорение поезда и, зная ускорение и полный тормозной путь, найти искомую скорость. Поезд не изменяет направление движения. Удобно использовать связь скорости и пройденного пути (1.1.1.4).

27. Напомним понятие среднего значения функции. Если имеется функция $f(x)$, значение которой в интервале от нуля до какого-то X постоянно и равно f_0, то площадь под графиком функции выражается через это значение $S = X \cdot f_0$ (рис. 1.75, *а*). В случае когда значение функции в каждой точке свое, удобно ввести некоторое число $f_{ср}$ так, чтобы площадь под графиком можно было и в этом случае записать в виде произведения

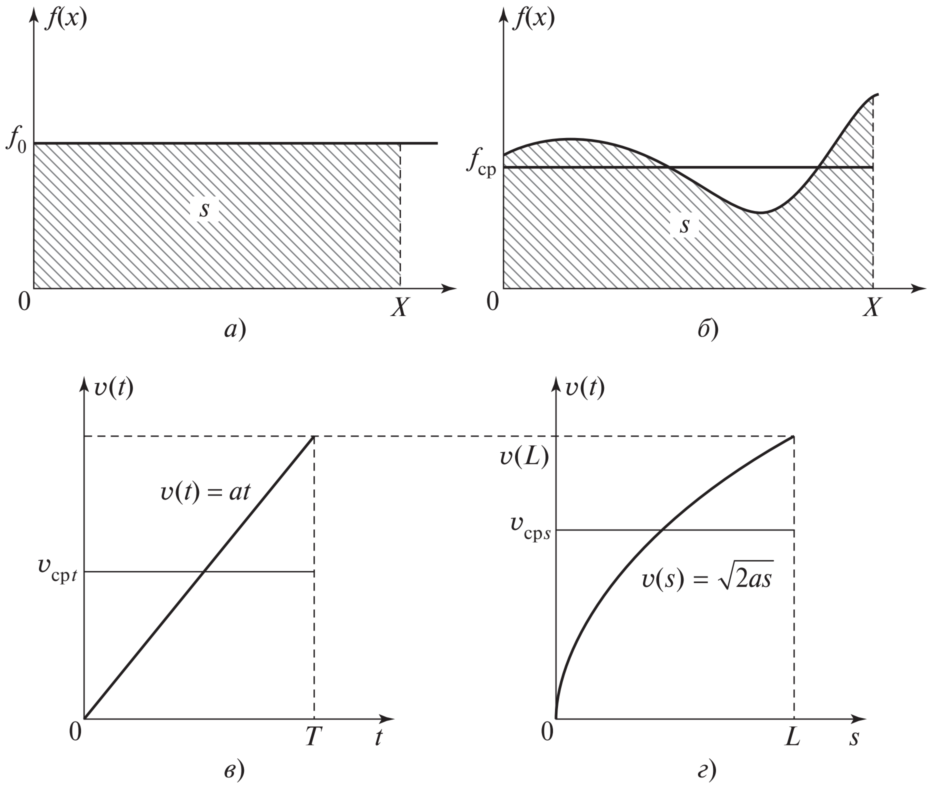

Рис. 1.75

$S = X \cdot f_{\text{ср}}$ (рис. 1.75, *б*). Это число называют средним значением функции на интервале от нуля до X.

В задаче гоночный автомобиль движется с постоянным ускорением. Скорость рассматривается в первом случае как функция времени $v = v(t) = at$ (рис. 1.75, *в*), во втором — как функция пройденного пути $v = v(s) = \sqrt{2as}$ (рис. 1.75, *г*). В первом случае с помощью средней скорости $v_{\text{ср}t}$ нужно выразить площадь треугольника, во втором — с помощью $v_{\text{ср}s}$ — площадь под параболой. Второй случай требует разбиения всего пути на маленькие участки, в пределах которых можно считать скорость неизменной, и дальнейшего суммирования площадей всех участков.

28. Использовать представление о геометрическом смысле производной функции и определение проекции скорости на ось.

29. Ввести вертикальную ось координат и использовать формулы для движения тела, брошенного вертикально (1.1.1.7).

30. Интересуемся только движением над поверхностью. Поэтому начало отсчета может быть только на какой-то высоте (не на глубине).

31. Считать, что при старте скорость воздушного шара нулевая. Выпавший предмет сразу после отделения от шара имеет направленную вверх скорость u относительно земли, такую же, как шар в этот момент времени. Ввести вертикальную ось и использовать уравнения для координаты и скорости при движении с ускорением (1.1.1.6).

32. Удобно в качестве неизвестной величины, для поиска которой необходимо составить уравнение, взять не высоту h, а время t, за которое камень упал с этой высоты на землю. Использовать формулу для пути при движении с постоянным ускорением (1.1.1.6).

33. Скорость второго снаряда меньше, поэтому догнать первый снаряд, когда он движется вверх, невозможно. Значит, нужно рассчитывать на попадание, когда первый снаряд начнет двигаться вниз. Столкновение произойдет раньше всего, если снаряды встретятся в самой верхней точке траектории второго снаряда. Используем формулы для описания движения тела, брошенного вертикально (1.1.1.7).

34. Ввести систему координат x, y с началом в месте расположения орудия. Записать уравнения для координат и проекций скорости, учитывая, что ускорение в любой точке траектории направлено вертикально вниз и по модулю равно 10 м/с^2 (1.1.1.7).

35. В задаче известны дальность полета L и время подъема мяча на максимальную высоту (время τ' в обозначениях предыдущей задачи). Используя формулы для этих величин из предыдущей задачи, получаем систему двух уравнений с неизвестными величинами v_0, α.

36. Записать выражения для векторов скоростей ракет как функций времени. В тот момент времени, когда скорости перпендикулярны, скалярное произведение векторов равно нулю. Это дает уравнение для модуля начальной скорости. Использовать уравнение для скорости при свободном падении в векторном виде (1.1.1.7).

37. Использовать уравнение траектории полета (1.1.1.7) мяча, считая, что он перелетает, почти касаясь сетки. Варьируя угол вылета мяча, выбрать из всех таких траекторий ту, для которой начальная скорость минимальна.

38. Шарик отражается в точке B под углом $\beta \neq \alpha$ к горизонту, но пролетает такое же расстояние, как и в прямом полете. Это условие устанавливает связь между углами α и β. Учитывая эту связь, а также условие, что угол падения равен углу отражения, можно выразить дальность полета через радиус полости и написать уравнение для заданного времени, куда войдет искомая величина g. Вывести из кинематических уравнений движения тела, брошенного под углом к горизонту (1.1.1.7), выражение для дальности полета L.

39. Использовать формулы для равномерного движения по окружности (1.1.1.8).

40. Учесть, что линейные скорости сцепленных зубьев шестерен одинаковы. Использовать связь линейной скорости с угловой скоростью (1.1.1.8).

41. Наблюдая за светлячком, можно узнать время, за которое стержень совершил 3 оборота.

42. Несколько слов о скорости сближения. Пусть по прямой дороге вдоль оси x едет велосипедист со скоростью $v = 5$ м/с (рис. 1.76). С произвольной точкой A впереди на шоссе он сближается со скоростью v, т.е. расстояние между ним и точкой A уменьшается на 5 м каждую секунду. Если точка находится не на дороге, как, например, точка B на рисунке, то сближение, т.е. уменьшение расстояния от точки B до велосипедиста, происходит с меньшей скоростью, к тому же непостоянной. Скорость сближения в момент времени t равна проекции скорости $\vec{v}$ на линию,

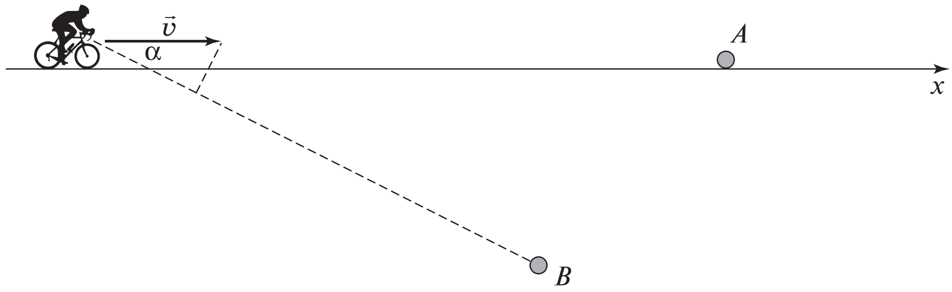

Рис. 1.76

соединяющую точку B с велосипедистом: $v(t)_{B\text{сближ}} = v\cos[\alpha(t)] < v$. В задаче движутся два велосипедиста. Для решения удобно одного «остановить», т.е. перейти во вращающуюся систему отсчета, где велосипедист покоится.

43. Учесть, что траектория автомобиля — окружность, т.е. не забыть про центростремительное ускорение (1.1.1.8).

44. Использовать определение ускорения, пригодное для любого движения (1.1.1.4).

45. Использовать определение ускорения (1.1.1.4).

46. Рассмотреть качение колеса как наложение двух движений — поступательного и вращательного. При этом нижняя точка колеса относительно земли неподвижна.

47. Подумать, по какой из изображенных на рис. 1.26 траекторий полетит сорвавшийся с колеса камень — по траектории Back или по траектории Forward? Рассмотреть срыв и движение камня с точки зрения неподвижного наблюдателя на земле и с точки зрения водителя автомобиля (любого). Использовать теорему сложения скоростей (1.1.1.3).

48. Рассмотреть движение лестницы в системе отсчета, движущейся поступательно со скоростью $\vec{v}$. Использовать теорему сложения скоростей (1.1.1.3).

49. Учесть, что мальчик смотрит на маму, находясь во вращающейся системе отсчета (как мы на Земле, когда рассматриваем небо). С его точки зрения, движутся столбы, дома, и чем дальше они от оси, тем быстрее движутся. Использовать определение скорости (1.1.1.3).

50. Пусть гироскутер покоится на расстоянии x от оси $O'O''$. Найти из геометрии связь угла α и расстояния X, т.е. определить функцию $\alpha = \alpha(X)$. Когда гироскутер движется, расстояние X изменяется и с ним изменяется угол α. Искомая угловая скорость $\omega = \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \alpha'$.

1.3.2. Динамика

1. Вспомнить, для каких систем справедлив принцип относительности Галилея (1.1.2.1).

2. Использовать табличное значение плотности золота.

3. Обычно такие задачи решают исходя из закона сохранения импульса. Но стоит рассмотреть прыжок с точки зрения 2-го и 3-го законов Ньютона (1.1.2.3; 1.1.2.5), вводя силы и ускорения, возникающие во время отталкивания при прыжке.

4. Использовать 2-й закон Ньютона (1.1.2.3) и формулу кинематики, связывающую ускорение, скорость и путь (1.1.1.4).

5. Электрон несет отрицательный заряд. Поэтому, когда он движется вдоль силовой линии, т.е. удаляясь от положительной обкладки, поле тормозит его. Применить 2-й закон Ньютона (1.1.2.3) и использовать определение ускорения (1.1.1.4).

6. Рассмотреть силы, приложенные к веревке (рис. 1.77), и учесть, что веревка невесомая по условию.

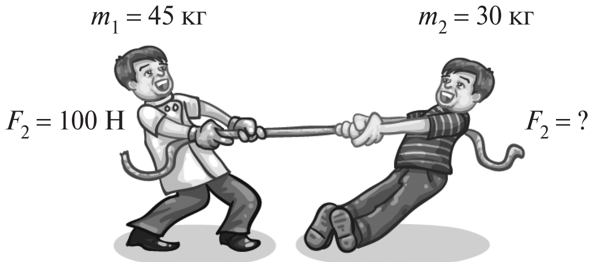

Рис. 1.77

7. Использовать 2-й закон Ньютона (1.1.2.3) с равнодействующей силой и правило сложения векторов (удобно применить правило треугольника).

8. Записать 2-й закон Ньютона (1.1.2.3) для грузов массами m и $m + \Delta m$. Учесть, что в обоих случаях натяжение троса одинаковое по условию. Решить систему уравнений.

9. Ускорение у всех брусков одинаковое и известное. Начать с вычисления силы натяжения T_3 по 2-му закону Ньютона (1.1.2.3). Зная эту силу, можно найти T_2, а затем и T_1.

10. Начать с вычисления величины натяжения T_3 из 2-го закона Ньютона (1.1.2.3), записанного для тела массой m_3.

11. Проследить за величиной реакции $N(a)$ пола в зависимости от модуля ускорения лифта и найти, при каком ускорении реакция обращается в ноль. Использовать 2-й закон Ньютона (1.1.2.3).

12. Равнодействующую силу можно найти по 2-му закону Ньютона (1.1.2.3), зная ускорение. Поэтому из заданных кинематических уравнений движения нужно искать ускорение, используя связь между координатой и ускорением (1.1.1.6).

13. Считать, что брусок неподвижен относительно конуса, т.е. вращается вместе с ним, испытывая центростремительное (1.1.1.8) горизонтальное ускорение. Расставить силы, действующие на брусок, применить уравнение 2-го закона Ньютона (1.1.2.3) в векторной форме и взять проекции уравнения на вертикальную и горизонтальную оси. Использовать максимальное значение силы трения покоя (1.1.2.9).

14. Центростремительное ускорение (1.1.1.8) шарика создает равнодействующая силы тяжести $m\vec{g}$ и нормальной реакции конуса $\vec{N}$. Записать 2-й закон Ньютона (1.1.2.3) для шарика с этими силами, взять проекции полученного векторного уравнения на вертикальную и горизонтальную оси и решить получившуюся систему уравнений.

15. Найти сумму 60 векторов разной длины. Можно эту сумму представить как сумму 30 пар векторов с одинаковым суммарным модулем у всех пар. Останется сложить 30 векторов одинаковой длины. Заметим, что эти 30 векторов при сложении образуют половину правильного 60-угольника.

16. Проследить за движением относительно стола половины веревки, удаленной от оси. Единственная внешняя горизонтальная сила, действующая на эту часть веревки, — сила со стороны динамометра. Если бы это было не протяженное тело, а точечное массой m, то показания динамометра давали бы величину центростремительной силы. В случае протяженного тела каждый кусочек веревки находится на «своем» расстоянии от центра. Поэтому можно ожидать, что в формуле для центростремительной силы будет фигурировать среднее расстояние до оси. Конечно, нужно такое предположение обосновать расчетом. Выполнить расчет можно, разбив мысленно внешнюю половину веревки на малые части («элементы»), считая каждый элемент материальной точкой, применив к нему 2-й закон Ньютона (1.1.2.3).

17. Скорости планет входят в кинематическую формулу центростремительного ускорения (1.1.1.8). Приравнять это выражение динамическому выражению для ускорения, следующему из 2-го закона Ньютона и закона всемирного тяготения (1.1.2.6), и получить из этого уравнения скорость планеты.

18. Силу F_+ легко вычислить, используя формулу для гравитационного притяжения точечных тел (1.1.2.6), — однородный шар притягивает тело, расположенное вне шара, так, как будто вся его масса сосредоточена в центре шара. Силу F_- можно найти, зная, что при погружении вглубь Земли притяжение линейно уменьшается, обращаясь в ноль в центре планеты (это положение нужно обосновать).

19. Подвесить на динамометре тело массой m один раз на полюсе, другой раз — на экваторе. Показания динамометра будут разными: на полюсе больше — $T_п > T_э$. Каждое из этих показаний записать в виде произведения массы на ускорение свободного падения: $T_э = mg_э$, $T_п = mg_п$, $g_п > g_э$. Если считать планету идеальным однородным по плотности шаром, то различие в показаниях динамометра нужно объяснить эффектом суточного вращения. На полюсе вращение не сказывается, а на экваторе проявляется наиболее сильно. Заметим, что понятие «сила тяжести» включает учет вращения планеты, а не только гравитационное притяжение, как часто путают.

Записать 2-й закон Ньютона для тела, подвешенного на экваторе, считая, что центростремительное ускорение (1.1.1.8) создается равнодействующей гравитационной силы (1.1.2.6) и силы $T_э$ со стороны динамометра. На полюсе $T_п$ равно притяжению планеты.

20. Использовать искусственный прием — восстанавливаем сферическую симметрию, заполняя полость свинцом. Теперь шар сплошной и притяжение шаров можно вычислить как притяжение двух точечных масс (1.1.2.6). Полученную силу притяжения представить как сумму силы притяжения вставленного свинцового шара и искомой силы притяжения шара с полостью.

21. Использовать закон Гука (1.1.2.8).

22. Жесткость k одной пружины или составленной из нескольких определяется отношением $k = \dfrac{F}{x}$ растягивающей/сжимающей силы F к величине вызванной этой силой деформации пружины x. Представить мысленный эксперимент по измерению k, нарисовать соответствующее расположение пружин, расставить силы и найти ответ.

23. Внешняя сила $\vec{F}$ создает ускорение брусков. Они движутся как единое тело, и поэтому ускорение можно вычислить по 2-му закону Ньютона (1.1.2.3) для тела с суммарной массой. Зная ускорение, применив 2-й закон Ньютона к отдельному бруску, найти связь силы натяжения и тянущей внешней силы $\vec{F}$.

24. Сила, удерживающая автомобиль на окружности, т.е. создающая центростремительное ускорение, — это сила трения колес об асфальт (1.1.2.9). При большой скорости центростремительное ускорение (1.1.1.8) велико и требуется большая сила трения. Но у силы трения есть верхний предел (1.1.2.9). Эта величина определяет верхнюю границу скорости на повороте.

25. Расставить силы, действующие на бруски, т.е. нарисовать векторы сил там, где они приложены. Написать 2-й закон Ньютона в векторном виде для каждого из брусков. Ввести горизонтальную и вертикальную оси. От векторных уравнений перейти к уравнениям для проекций сил и ускорений. Получится линейная система двух уравнений с тремя неизвестными a_1, a_2, T. Учесть нерастяжимость нити. Из нее следует равенство путей, проходимых брусками, и равенство модулей ускорений $a_1 = a_2$ («условие связи»). Решить полученную систему уравнений.

Нужны формулы для силы трения скольжения (1.1.2.9) и 2-й закон Ньютона (1.1.2.3).

26. Убедиться расчетом, что первый брусок при заданных параметрах μ и α не может удержаться на наклонной плоскости сам — мала сила трения (1.1.2.11). Надо «помочь» трению удержать брусок с помощью нити, т.е. при минимальной удерживающей массе m_2 сила трения направлена вверх. Будем увеличивать массу m_2. В какой-то момент брусок поедет вверх, т.е. сила трения при максимальной массе m_2 будет направлена вниз.

27. Если трение между кубом и бруском велико, то груз m_2 не сможет сдвинуть верхний брусок и все тела будут неподвижны. При малом коэффициент трения μ_1, например при $\mu_1 = 0$, бруски будут двигаться, а куб при этом может тоже двигаться или стоять — сценарий зависит от соотношения параметров. Наименьшее значение коэффициента μ_1, при котором бруски неподвижны, определяется уравнением

$$\mu_1 m_1 g = m_2 g \Rightarrow \mu_1 = \frac{m_2}{m_1} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Если $\mu_1 > 0{,}6$, то при любом коэффициенте μ_2 система покоится. Дальше нужно рассматривать ситуацию, когда $\mu_1 < 0{,}6$. Рассмотреть ситуацию, когда куб покоится на грани скольжения. Найти натяжение нити и учесть, что, действуя на блок, нить толкает куб влево и вниз. Трение наверху и внизу тянет куб вправо.

28. Стержень по условию невесомый. Значит, в этой задаче он взаимодействует только с шариками, сила тяжести на него не действует. Если бы мы держали стержень с шариками и отпустили без толчка, они стали бы свободно падать с ускорением g и стержень никак не давил бы на шарики. Но сила упругости пружины (1.1.2.8) толкает вниз, из-за этого система «стержень + шарики» падает с ускорением большим, чем g. Найти это ускорение можно по 2-му закону Ньютона — по равнодействующей силе, приложенной к системе «шарики+стержень». Зная ускорение, можно применить 2-й закон Ньютона к нижнему шарику и получить ответ.

29. Расставить силы, действующие со стороны шариков на стержень сразу после обрыва. Правый конец стержня начинает движение вниз, увлекая правый шарик. Он (правый шарик) по 3-му закону Ньютона (1.1.2.3) действует на стержень вверх. Левая нить тоже действует на стержень вверх. Невесомость стержня означает, что сумма сил, действующих на него, всегда равна нулю. Значит, левый шарик действует на стержень вниз. Из-за невесомости и сумма моментов сил, приложенных к стержню, равна нулю. Это условие позволяет установить соотношения между тремя силами, действующими на стержень. Используя 3-й закон Ньютона, можно с этими же силами написать уравнения 2-го закона Ньютона (1.1.2.3) для шариков и оттуда найти ответ.

1.3.3. Статика

1. Учесть, что результат первого эксперимента со столбом выявил положение центра тяжести (1.1.3.6) столба. Составить уравнение равновесия (1.1.3.4) для моментов во втором случае, зная из первого эксперимента, где находится центр тяжести столба.

2. Использовать условия равновесия твердого тела — бревна (1.1.3.4).

3. Сила трения (1.1.2.9) между санками и снегом направлена назад, а трение, действующее на лыжи, направлено вперед и обеспечивает движение системы «рыбак + сани». Нужно расставить силы, связать нормальные реакции с силами трения и потребовать, чтобы горизонтальные проекции равнодействующих сил, приложенных к рыбаку и саням, были положительные (горизонтальная ось направлена вперед).

4. Искомую силу можно найти из уравнения равновесия куба, записанного для моментов сил (1.1.3.4). Удобно выбрать ось, относительно которой рассматриваются моменты сил, проходящей через ребро куба на полу.

5. На рис. 1.78, *а* изображен стержень с громадной втулкой внутренним радиусом R («громадность» нужна, чтобы можно было что-то разглядеть на рисунке). Надеваем втулку на темно-серую горизонтальную неподвижную ось/вал радиусом чуть меньше R. Втулка касается оси только в точке A (см. рис. 1.78, *б*). Стержень размещаем вертикально, и он остается в таком положении, когда его отпустим. Включаем мотор, вал начинает вращаться, пусть против часовой стрелки, увлекая за собой втулку.

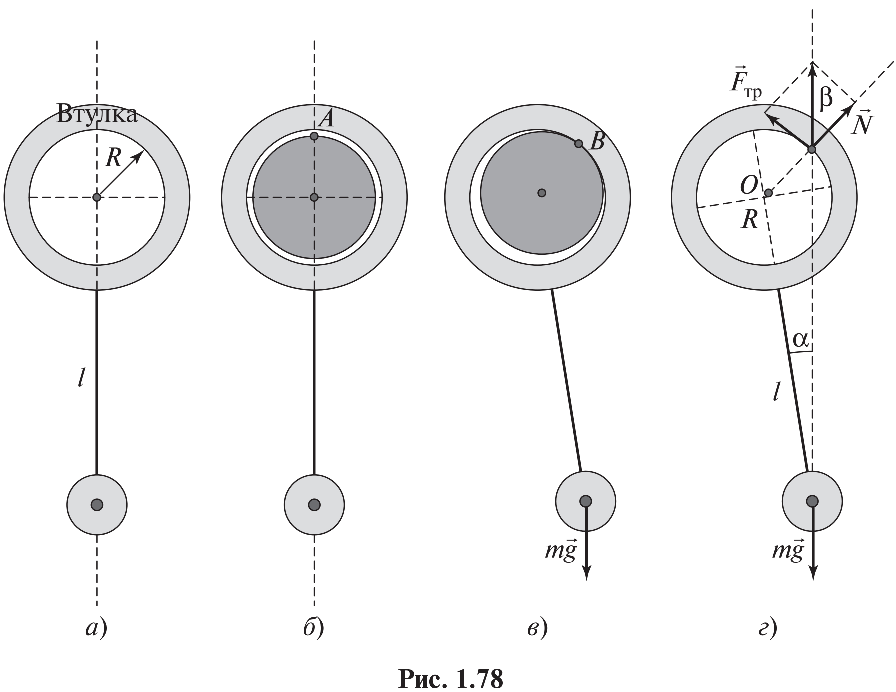

Рис. 1.78

В точке *A* возникает сила трения, приложенная к втулке со стороны вала, направленная влево. Под действием этой силы стержень поворачивается против часовой стрелки, и контакт втулки с осью смещается вправо в точку *B* (рис. 1.78, *в*). Самое большое отклонение стержня от вертикали будет при максимальной силе трения покоя (1.1.2.9). В равновесном положении сумма сил и сумма моментов сил, действующих на тело (стержень + втулка + шарик), равны нулю. Этому соответствует векторная диаграмма сил на рис. 1.78, *г*, откуда можно получить ответ для угла отклонения. На тело действуют три силы, лежащие в одной плоскости, $m\vec{g}$, $\vec{F}_{\text{тр}}$, $\vec{N}$, и применима теорема о трех силах (1.1.3.5).

6. Нарисовать произвольный треугольник и разбить его площадь узкими полосками, параллельными одной из сторон треугольника. Найти линию, на которой лежат центры тяжести всех полосок. Потом разбить площадь треугольника на полоски, параллельные второй стороне, потом третьей.

7. При рассмотрении условия равновесия для моментов сил (1.1.3.4) выбрать ось, проходящую через одну из медиан, потом повторить рассуждения с осью, проведенной через другую медиану.

8. Можно убедиться, что искомая сила больше максимальной силы трения покоя. Это значит, что под действием искомой силы куб будет двигаться с ускорением и задача выходит за рамки статики. Но если к действующим силам добавить силу инерции (1.1.2.12), приложенную в центре масс куба, сумма сил окажется равной нулю и можно будет использовать уравнения равновесия для моментов сил (1.1.3.4). Удобно для рассмотрения моментов сил выбрать ось, проходящую через правое нижнее ребро куба.

9. Болты не плавают в керосине. Поэтому при их погружении в жидкость уровень поднимается так, как будто добавили керосина объемом, равным объему болтов. Учтя, сколько керосина при этом вылилось из сосуда, можно найти объем стальных болтов и затем их массу. Использовать формулу, связывающую плотность, массу и объем вещества (1.1.2.2).

10. Расставить силы, действующие на куб, и учесть, что он находится в состоянии равновесия. Использовать условие равновесия для сил (1.1.3.4) с учетом силы Архимеда (1.1.3.9).

11. Использовать условие плавания тел (1.1.3.10).

12. Выделить вертикальный столб воды наибольшей высоты, расставить силы, действующие на него, и, применив к нему 2-й закон Ньютона

(1.1.2.3), найти силу, действующую на выделенный столб воды со стороны дна. Затем воспользоваться 3-м законом Ньютона (1.1.2.5) и определением давления жидкости (1.1.3.7).

13. Рассмотреть условия равновесия тонкого слоя ртути в трубке на уровне поверхности ртути в широком сосуде. Использовать закон Паскаля (1.1.3.7) и формулу для давления столба жидкости под действием силы тяжести (1.1.3.8).

14. Рассмотреть блок из брусков как одно тело, плавающее в воде, применить закон Архимеда (1.1.3.9) и условие плавания тел (1.1.3.10).

15. Использовать формулу для силы Архимеда (1.1.3.9).

16. Использовать определение силы давления (1.1.3.7), формулу для давления столба жидкости под действием силы тяжести (1.1.3.8) и закон Паскаля (1.1.3.7).

17. Использовать условие плавания тел (1.1.3.10).

18. Использовать формулу для давления столба жидкости на дно сосуда в присутствии силы тяжести (1.1.3.8). Учесть изменение уровня молока в стакане от детской шалости.

19. Использовать формулу для объема жидкости (или газа), прошедшего через сечение за заданное время (1.1.3.12). Необходимую для ответа скорость течения воды в трубе найти из кинематики по высоте подъема капель воды (1.1.1.7).

20. В задаче под словами «сила, с которой жидкость давит на боковую поверхность» подразумевается не модуль вектора суммарной силы, действующей на боковую поверхность, а скалярная величина — произведение среднего давления на площадь боковой поверхности, т.е. сумма модулей сил, действующих на малые элементы поверхности. Например, изображенные на рис. 1.79 силы $\vec{F}$ и $(-\vec{F})$, действующие на одинаковые по площади элементы поверхности, не компенсируют друг друга, если мы ищем вклад в силу давления на боковую поверхность, а дают в $F_{бок}$ вклад $2F$. Векторная сумма сил, действующих на отдельные участки боковой поверхности цилиндра, равна нулю в силу симметрии. Нужно учесть, что давление на боковую стенку изменяется с глубиной (1.1.3.8), и использовать для расчета полной силы давления на боковую поверхность среднюю величину давления.

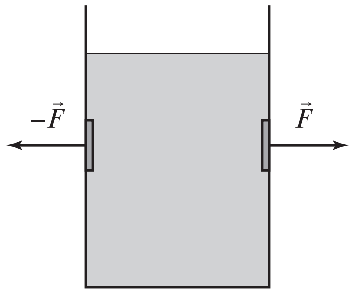

Рис. 1.79

21. Как и в предыдущей задаче, чтобы вычислить силу давления на стенку, нужно взять среднее по высоте давление и умножить на площадь стенки.

22. Считать всю боковую поверхность сосуда состоящей из столь малых элементов, что давление этого элемента на воду в сосуде одинаково для всех точек данного элемента. Использовать 3-й закон Ньютона (1.1.2.5).

23. Искомая сила равна сумме проекций на ось полусферы сил давления, действующих на все элементы поверхности полусферы.

24. Представить, что взвешивание производится на пружинных весах (динамометре): один раз, когда тело на воздухе, второй — когда тело погружено в воду и отношение показаний весов равно 3. Уменьшение показаний происходит из-за проявления силы Архимеда (1.1.3.9) в воде. Силой Архимеда в воздухе пренебрегаем.

25. Учесть, что льдина, находящаяся далеко от берега, плавает в воде, и использовать условие плавания тел (1.1.3.10).

26. Сравнить объем вытесненной воды в случае, когда кусок золота на дне и когда он плавает на корабле или на плоту.

27. Падающее с высоты тело набирает перед погружением в воду скорость, определяемую этой высотой (1.1.1.7). В воде оно движется под действием двух вертикальных сил, направленных в противоположные стороны: силы тяжести и силы Архимеда (1.1.3.9). Плотность материала тела меньше плотности воды, и, значит, сила Архимеда больше силы тяжести. Равнодействующая этих сил определяет ускорение (торможение) тела в воде и тем самым максимальную глубину погружения h, равную тормозному пути.

28. Подъемной силой аэростата называют разность между силой Архимеда (1.1.3.9) и силой тяжести. Сила Архимеда может быть вычислена по заданному объему и плотности воздуха, взятой из таблиц. Плотность водорода тоже берется из таблиц.

29. Выразить заданные в задачи силы через неизвестные массы, чтобы получить систему уравнений для отыскания масс. Использовать условие равновесие тела, подвешенного на динамометре и опущенного в таком состоянии в воду. Учесть силу Архимеда (1.1.3.9) в воде, силой Архимеда в воздухе пренебречь.

30. Выделить в воде объем, ограниченный такой же поверхностью, как у погруженного тела, и написать условие равновесия выделенной массы воды.

31. Учесть, что сила Архимеда, действующая на шар, равна сумме выталкивающих сил масла и воды, и использовать условие плавания тела (1.1.3.10).

32. Учесть, что давление на уровне aa' в правом и левом коленах одинаковое (рис. 1.80). Использовать формулу для давления столба жидкости (1.1.3.8).

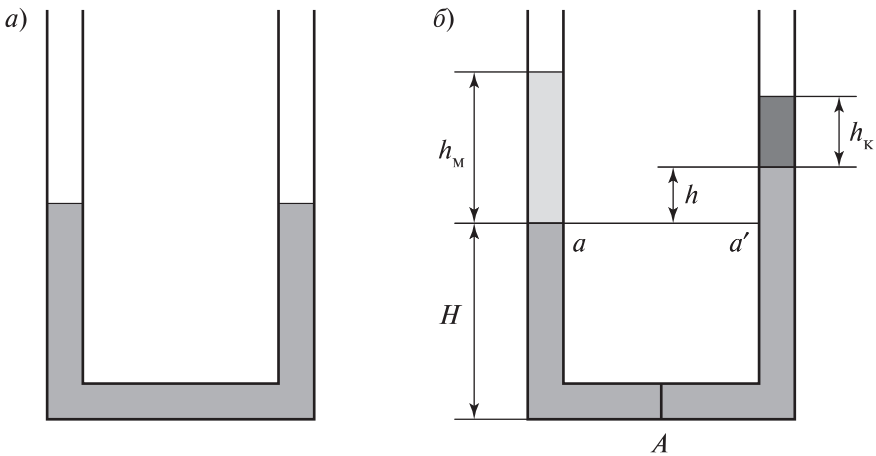

Рис. 1.80

33. Работа силы F при перемещении поршня равна кинетической энергии воды, вытекшей из-за этого перемещения. Использовать формулу для массы воды, вытекшей из трубы за заданное время (1.1.3.11).

34. Силу находим по 2-му закону Ньютона, записанному в импульсной форме (1.1.4.2). Используем формулы для объема вытекшей жидкости (1.1.3.11) и формулу Торричелли для скорости вытекающей ртути (1.1.3.13).

35. Поплавок в равновесии под действием трех сил: силы тяжести, силы натяжения нити и силы Архимеда (1.1.3.9). Условие равновесия (1.1.3.4) дает нужное уравнение для отыскания силы натяжения.

36. Используем формулы для объема вытекшей воды (1.1.3.11) и закон сохранения энергии для определения скорости на заданной высоте по начальной скорости.

37. Выразить равнодействующую сил давления на плотину с двух сторон через высоты уровней воды по разные стороны плотины. Использовать определение силы давления (1.1.3.7) и формулу для давления столба воды под действием силы тяжести (1.1.3.8).

38. Аэростат в обоих случаях движется равномерно, значит, каждый раз суммарная сила равна нулю. В задаче три силы: сила тяжести, сила сопротивление воздуха и сила Архимеда (1.1.3.9). Из-за сбрасывания балласта изменяется по модулю только сила тяжести.

39. Рассмотреть силы, необходимые, чтобы равномерно перемещать тело в воде и в воздухе, и вычислить их работы. Нужны формулы, определяющие величину работы (1.1.4.7) и выражающие силу Архимеда (1.1.3.9).

40. Воспользоваться формулой (1.1.3.11) для веса тела, погруженного в жидкость.

41. Подъемная сила — это разность силы Архимеда (1.1.3.9) и силы тяжести аэростата. При замене гелия на водород сила Архимеда останется прежней — она определяется объемом аэростата и плотностью воздуха. Уменьшится масса газа $m_{\text{газ}}$, и это даст выигрыш в подъемной силе.

42. Учесть роль силы Архимеда (1.1.3.9) в воздухе при взвешивании.

43. Нас интересует сила $\vec{F}$, действующая со стороны воды на сферическую часть поверхности верхней полусферы. Эта сила складывается из множеств сил, действующих на малые кусочки (элементы) поверхности полусферы (рис. 1.81). Очевидно, что искомая сила не зависит от материала

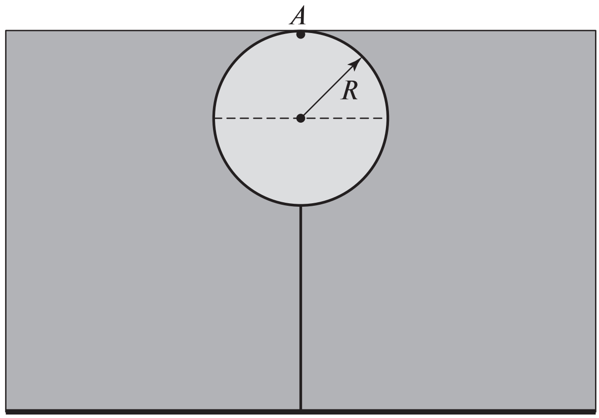

Рис. 1.81

сферы. Пусть это будет ледяная полусфера. Если мы ее расплавим, то на получившуюся воду будет действовать та же система сил, что и на ледяную полусферу (изменением объема при плавлении при таких мысленных экспериментах пренебрегают). Получившаяся вода окажется в равновесии, как и вся вода, и это дает возможность написать уравнение равновесия для сил, куда войдет и искомая сила. Использовать формулы для силы Архимеда (1.1.3.9) и для объема шара.

44. Для цистерны имеется равновесная глубина погружения, при которой сила тяжести равна архимедовой силе. После колебаний цистерна в установившемся состоянии окажется погруженной на эту глубину. Чтобы определить количество теплоты Q, которое выделится за время установления равновесия, нужно найти кинетическую энергию цистерны, когда она первый раз достигает равновесной глубины погружения. Вся эта кинетическая энергия в итоге переходит в теплоту.

45. Искомая плотность войдет в уравнение равновесия палочки, записанное для моментов сил (1.1.3.4). Удобно считать, что ось вращения, относительно которой вычисляются моменты сил, проходит через точку O. Стакан гладкий, это означает, что сила, приложенная к палочке в точке B, перпендикулярна палочке. Учесть, что сила Архимеда (1.1.3.9) приложена в середине погруженной в воду части палочки.

46. Учесть, что по мере погружения бруска под действием спицы уровень воды в стакане растет. Нарисовать график зависимости силы, необходимой для погружения бруска, от его перемещения из начального положения в конечное. По графику силы вычислить работу силы.

47. Записать уравнение для моментов силы Архимеда и силы тяжести, выражающее условие равновесия стержня (1.1.3.4). Учесть, что сила Архимеда приложена в середине подводной части стержня.

48. Вертолет сжигает топливо, но ни кинетическая, ни потенциальная энергия его практически не изменяются (немного уменьшается потенциальная — сгорает топливо, уменьшается общая масса). Энергия, выделяющаяся при сгорании топлива, тратится в основном на создание «ветра» — потока воздуха, направленного вниз. Вертолет «толкает» воздух вниз, воздух по 3-му закону Ньютона поддерживает вертолет. Нужно ввести скорость v создаваемого винтом потока воздуха и выразить искомую мощность через нее и отношение $\dfrac{\Delta m}{\Delta t}$ — массы воздуха, получившего скорость v за время Δt, к этому промежутку времени. Второе уравнение с этими же величинами получится при использовании 2-го закона Ньютона в импульсной форме (1.1.4.2), примененного к массе воздуха Δm. Сила, входящая в это уравнение, согласно 3-му закону Ньютона равна силе тяжести вертолета. И третье уравнение, куда войдут Δm, v и длина лопасти винта l, даст формула для переноса массы потоком с заданной скоростью (1.1.3.12). Входящая в нее площадь потока определяется размером лопастей винта.

1.3.4. Законы сохранения

1. Изобразить на рисунке вектор импульса до и после столкновения и взять разность этих векторов. Модуль вектора найти по теореме Пифагора. Использовать правило вычитания векторов «уколи уменьшаемое».

2. Единственная внешняя сила, которая действует на снаряд до взрыва и на осколки после взрыва, — сила тяжести. У нее нет горизонтальной проекции, и поэтому горизонтальный импульс не изменяется.

3. Использовать 2-й закон Ньютона, записанный в импульсной форме (1.1.4.2).

4. Использовать 2-й закон Ньютона в импульсной форме (1.1.4.2). Импульс изменяет сила тяжести камня. Время действия силы найдется из кинематики по уравнению для зависимости скорости шарика от времени (1.1.17).

5. Горизонтальная проекция суммарного импульса мальчика и брошенного груза до броска и после броска равна нулю.

6. Необходимым (хотя и недостаточным) условием равенства энергий шарика до и после столкновения является отсутствие трения в коротком процессе взаимодействия шарика и стола. Это означает, что стол действует на шарик только по нормали к поверхности. Применив 2-й закон Ньютона в импульсной форме (1.1.4.2), можно понять, куда направлен импульс шарика после удара.

7. Плита считается столь тяжелой, что не «чувствует» столкновения с шариком, т.е. изменения ее импульса и энергии в процессе столкновения пренебрежимо малы. Тогда систему отсчета, в которой плита покоится, можно считать инерциальной, и в ней выполняются законы сохранения энергии и импульса при столкновении шарика с плитой. Это значит, что при столкновении не изменяется модуль скорости шарика и угол падения равен углу отражения. Нужно воспользоваться теоремой сложения скоростей (1.1.1.3), найти с ее помощью вектор скорости шарика в системе отсчета плиты до столкновения, потом еще раз, применив теорему, найти скорость шарика относительно неподвижной системы после столкновения. Это довольно громоздкие выкладки с использованием рисунков и теоремы синусов. Имеет смысл предварительно рассмотреть частный случай, когда шарик летит по нормали к плите, угол $\alpha = 0$.

8. Импульс джипа может возникнуть только под действием внешней горизонтальной силы. Единственная такая сила в задаче — это сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ колес об асфальт. Именно эта сила выступает как «сила тяги» в случаях автомобиля, велосипеда, троллейбуса... Использовать максимальную величину этой силы и по ней и приобретенному импульсу найти минимальное время из 2-го закона Ньютона, записанного в импульсной форме (1.1.4.2). Величины кинетической энергии автомобиля и работы силы $\vec{F}_{\text{тр}}$ найти из определений (1.1.4.7; 1.1.4.10).

9. Использовать законы сохранения импульса (1.1.4.4) и энергии (1.1.4.19) при столкновении и убедиться, что в результате столкновения частицы движутся в обратную сторону с теми же скоростями.

10. В отличие от предыдущей задачи, в этой полный импульс шайб не равен нулю. Но можно перейти в систему отсчета, где он равен нулю, и тогда использовать простой результат предыдущей задачи. Пусть в какой-то момент времени радиусы-векторы шайб равны $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$. Точку с радиусом-вектором $\vec{r}(t)_{\text{цм}} \equiv \dfrac{m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t)}{m_1 + m_2}$ называют центром масс системы. Скорость движения центра масс выражается через полный импульс $\vec{P} \equiv m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ системы:

$$\vec{V}_{\text{ЦМ}} = \vec{r}'(t)_{\text{ЦМ}} \equiv \frac{m_1\vec{r}_1'(t) + m_2\vec{r}_2'(t)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{P}}{M}.$$

Когда нет внешних сил, полный импульс системы сохраняется и скорость центра масс постоянна. Если перейти в систему отсчета, относительно которой центр масс покоится (система центра масс), то в этой системе полный импульс равен нулю, и упругое столкновение шайб выглядит, как в предыдущей задаче, — шайбы после столкновения движутся назад с прежними по модулю скоростями. При использовании представления о центре масс задача о столкновении сводится к переходу от скоростей шайб, заданных в неподвижной системе, к скоростям в системе центра масс, а затем обратно в неподвижную систему.

Конечно, можно решить задачу, не используя представление о центре масс, а записывая законы сохранения импульса и энергии в неподвижной системе отсчета.

11. Использовать теорему об изменении кинетической энергии тела и определение мощности силы (1.1.4.11; 1.1.4.8; 1.1.4.9).

12. Вычислить, насколько уменьшается потенциальная энергия воды в бассейне за секунду из-за вытекания воды. Использовать формулу для потенциальной энергии (1.1.4.15).

13. Использовать формулу, выражающую мощность через силу и скорость перемещения точки приложения силы (1.1.4.9).

14. Модуль вектора скорости, определяющий кинетическую энергию тела (1.1.4.10), в этой задаче совпадает с модулем проекции скорости на ось x.

15. Работа двигателя идет на разгон спутника до первой космической скорости (на кинетическую энергию, соответствующую этой скорости) и на увеличение потенциальной энергии спутника за счет подъема на высоту h орбиты (1.1.4.15). Поскольку высота орбиты мала по сравнению с расстоянием до центра Земли, можно не учитывать уменьшение ускорения свободного падения с высотой.

16. Расставить силы, зная по условию, что равнодействующая силы тяжести и силы натяжения нити, создающая ускорение, горизонтальна.

Это позволяет написать уравнение, связывающее силу натяжения T и искомый угол α. Центростремительное ускорение тоже можно выразить через эти же параметры и модуль скорости. Скорость связать с углом через закон сохранения энергии (1.1.4.16).

17. По условию поверхность гладкая, трения нет и, значит, нет силы, способной изменить горизонтальную проекцию импульса шарика. Потеря энергии происходит за счет уменьшения нормальной компоненты импульса.

18. Налетающий шар толкает висящий с силой $\vec{N}$, направленной по линии, соединяющей их центры. Нерастяжимая нить не дает висящему шару двигаться в направлении вектора $\vec{N}$. «Не дает» означает, что при ударе возникает большая сила натяжения $\vec{T}$, направленная вдоль нити вверх. Для описания взаимодействия шаров во время столкновения нужно записать 2-й закон Ньютона в векторной импульсной форме для каждого шара (1.1.4.2), перейти к проекциям и учесть сохранение кинетической энергии при ударе. Эта система уравнений позволит найти угол, который составит скорость налетевшего шара с горизонтом после удара, и модуль этой скорости.

19. Удобно первое столкновение рассмотреть в системе отсчета, где центр масс левой и средней шайб неподвижен (1.1.4.13). Соответственно, второе столкновение рассмотреть в системе, где неподвижен центр масс средней и правой шайб. Максимальную скорость $u_{\max}$ правой шайбы найти, используя производную $u'(\mu)$.

20. По мере удаления от Земли сила, необходимая для набора телом высоты, уменьшается, потому что уменьшается притяжение. То есть для решения задачи нужно вычислить работу силы, зависящей от расстояния. Использовать первообразную функцию или формулу для энергии гравитационного взаимодействия двух точечных тел (1.1.4.18).

21. Использовать формулы для работы по поднятию тела из предыдущей задачи и закон сохранения энергии.

22. По обочине тащить балку тяжелее, чем по асфальту. Поэтому по мере того, как часть балки на обочине будет увеличиваться, сила, необходимая, чтобы перемещать бревно, будет расти. Для вычисления искомой работы нужно нарисовать график зависимости силы $F(x)$, с которой надо тащить балку, от пройденного по обочине расстояния x, и подсчитать площадь под графиком.

23. На вершине полусферы шайба давит на нее с силой mg. По мере спуска с вершины сила давления шайбы на полусферу (и по 3-му закону Ньютона полусферы на шайбу) становится все меньше и на какой-то высоте обращается в ноль. Нужно найти эту высоту. Шайба движется по окружности. Центростремительное ускорение обусловлено радиальной компонентой силы тяжести и нормальной реакцией $\vec{N}$. Но в точке отрыва реакции уже нет, и центростремительное ускорение создает только компонента $mg\cos\alpha$. Нужно написать кинематическое выражение для центростремительного ускорения (1.1.1.8) и динамическое, следующее из 2-го закона Ньютона. Приравнивая их, найти высоту. Скорость, входящую в кинематическую формулу центростремительного ускорения, найти по закону сохранения энергии.

24. Если бы обруч перемещался по горизонтальной поверхности с той же скоростью $\vec{v}$, располагаясь «лежа», как шайба, это было бы поступательное движение (рис. 1.82), все точки обруча двигались бы с одинаковой скоростью и кинетическая энергия вычислялась бы как для точечного тела (1.1.4.10). А когда обруч катится, каждая точка обруча имеет свою скорость, и, чтобы вычислить кинетическую энергию всего обруча, его надо мысленно разбить на малые элементы и просуммировать кинетические энергии всех элементов, зная скорости каждого элемента. Эти скорости можно найти по теореме сложения скоростей (1.1.1.3), складывая векторно поступательную и вращательную скорости каждого элемента.

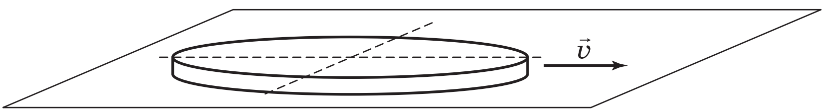

Рис. 1.82

25. Задача похожа на задачу со скатывающейся с полусферы шайбой. Нужно только принять во внимание вращение обруча. Из-за вращения связь кинетической энергии и скорости имеет вид $E_к = mv^2$, как показано в предыдущей задаче.

26. Пусть скорость снаряда за мгновение до разрыва равна $\vec{v}$. Выразить скорость меньшего осколка после разрыва через эту скорость. Затем с помощью закона сохранения импульса (1.1.4.4) выразить скорость большего осколка. Из кинематики выразить время полета до момента взрыва через искомую начальную скорость и заданный угол вылета снаряда, используя формулы (1.1.1.7). Записать уравнение для расстояния L, используя это время. Из полученного выражения определится искомая начальная скорость v_0 снаряда.

27. Удобно решать в системе отсчета, связанной с баржой, считая ее столь тяжелой, что ее скорость неизменна. Следя за первым мешком, можно найти коэффициент трения мешка о палубу. Второй мешок за время удара о палубу теряет горизонтальный и вертикальный импульсы. Силы, изменяющие эти компоненты импульса, — трение и нормальная реакция соответственно, связаны с найденным коэффициентом трения. Это дает уравнение для отыскания высоты.

28. На систему тел «кот + доска» не действуют внешние горизонтальные силы. Поэтому при прыжке кота горизонтальный импульс системы сохраняется, т.е. доска едет в противоположную сторону со скоростью, равной горизонтальной скорости кота. Относительно пола кот прыгает на расстояние, равное половине длины доски. Он может выбирать угол и начальную скорость при прыжке. Вычислить суммарную кинетическую энергию доски и кота и считать эту величину равной работе кота. Варьируя угол, найти минимум этой работы.

29. А. Посмотреть длину пружины с грузами без нити. Нить должна быть короче этой длины.

Б. Чтобы нижняя шайба оторвалась от поверхности, упругая сила со стороны пружины должна тянуть ее вверх и по модулю сравняться с силой тяжести mg.

30. По перемещению частицы за секунду оценить число фотонов, передавших ей импульс в течение этого времени. Облучаемая площадь частицы много меньше сечения луча, поэтому лишь малая часть излученных за секунду фотонов передала импульс частице. Искомая мощность лазера равна числу фотонов, излученных в секунду, умноженному на энергию одного фотона.

1.3.5. Механические колебания и волны

1. Сравнить заданное в условии уравнение колебаний со стандартной записью (1.1.5.1).

2. Нарисовать ось x и, используя формулу для координаты в условии, отметить схематично положение тела на оси в заданные моменты времени.

3. Рассмотреть движение шайб как движение математического маятника с длиной, равной радиусу полусферы. Величину радиуса полусферы, определяющую время движения шайб согласно формуле Гюйгенса (1.1.5.5), найти, используя заданное время свободного падения шарика (1.1.1.7).

4. Планка опирается на два колеса, и, если она лежит несимметрично, силы давления планки на колеса и возникающие горизонтальные силы трения, действующие на планку со стороны колес, разные. Представить проекцию равнодействующей сил трения, действующих на планку, в виде $F_x = -kx$, где x — смещение планки из положения равновесия. Для нахождения периода колебаний доски можно использовать формулу пружинного маятника (1.1.5.6), где полученный коэффициент k играет роль коэффициента упругости, а масса доски — роль массы груза на пружине.

5. Подвешенный на пружине шарик находится в равновесии, когда удлинение пружины таково, что сила упругости равна силе тяжести. В задаче шарик отпускают не в этом положении (тогда бы он остался в покое), а выше, когда удлинение пружины равно нулю, и сила тяжести заставляет шарик двигаться вниз. Возникают гармонические колебания вокруг равновесного положения с амплитудой, равной начальному отклонению от положения равновесия, и частотой, определяемой формулой пружинного маятника (1.1.5.6). Написать уравнение гармонических колебаний (1.1.5.1), выбрав начало вертикальной оси в положении равновесия и учтя, что в начальный момент шарик максимально удален от положения равновесия.

6. Пока шарик касается пружины, система «шарик + пружина» ведет себя как пружинный маятник, хотя шарик не прикреплен к пружине, как это имеет место в маятнике. Нужно найти равновесное положение системы, ввести вертикальную ось с началом в этой точке и записать уравнения гармонических колебаний координаты шарика (1.1.5.1) и его скорости (1.1.5.3). В уравнения войдут две неизвестных величины — амплитуда колебаний координаты и начальная фаза колебаний (частота колебаний находится по формуле пружинного маятника (1.1.5.6)). Эти величины определятся из начальных условий: пружина в начальный момент не деформирована и координата шарика в этот момент известна. И скорость в начальный момент известна: она равна скорости тела, упавшего с заданной высоты (1.1.1.7). Определив начальную фазу и амплитуду колебаний, можно ответить на вопросы задачи.

7. Когда брусок находится на одинаковом расстоянии от правой и левой стенок кожуха, пружины действуют на кожух с равными по модулю силами, направленными в противоположные стороны, и действие этих сил компенсируется. При колебаниях брусок выходит из симметричного положения, и равнодействующая сил упругости, действующих на кожух, становится отличной от нуля. Если равнодействующая окажется больше, чем максимальная сила трения покоя (1.1.2.9) кожуха, кожух сдвинется с места. Нужно ввести амплитуду колебаний, выразить через нее равнодействующую силу и приравнять максимальной силе трения покоя кожуха.

8. При малом отклонении шарика в перпендикулярном шнуру направлении на него действует возвращающая сила, пропорциональная отклонению от положения равновесия. Нужно выразить коэффициент пропорциональности через заданные в условии величины и использовать его для вычисления частоты колебаний по формуле пружинного маятника (1.1.5.6). Можно считать, что сила натяжения шнура не изменяется по модулю при отклонении шарика от положения равновесия (пренебречь изменением длины шнура).

9. Без электрического поля положению равновесия шарика соответствует вертикальное направление нити и шарик внизу. Если поле не слишком велико, то такое расположение шарика будет равновесным и в присутствии поля. При отклонении шарика от равновесного положения на небольшой угол на него действуют сила тяжести, электрическая (кулоновская) сила (3.1.1.3) и сила натяжения нити. Равнодействующая этих сил возвращает шарик к положению равновесия. Приближенно можно считать, что шарик движется не по дуге окружности, а по отрезку горизонтальной прямой. Нужно ввести ось x вдоль этой прямой с началом в точке пересечения с равновесной вертикалью, получить для проекции равнодействующей силы на ось x выражение $F_x = -kx$ и найти частоту по формуле пружинного маятника (1.1.5.6).

10. Рассмотреть случай сильного поля, когда кулоновская сила $qE > mg$. Найти частоту колебаний в этом случае, учитывая, что в равновесии шарик находится вверху.

11. Рассматриваем только малые углы φ отклонения стержня от вертикали. В этом приближении можно не учитывать смещение оси пружины по вертикали и не отличать $\sin\varphi$ от φ. Идея решения сводится к написанию энергии $E(\varphi)$ маятника как функции угла. Поскольку при колебаниях энергия сохраняется (1.1.5.7), производная $E'[\varphi(t)]$ этой функции по времени должна быть равной нулю. Такое условие приводит к уравнению для зависимости угла от времени $\varphi(t)$, из которого и определяется частота колебаний.

12. Искомая сила должна привести к такой деформации пружины, при которой сила упругости (1.1.2.8) станет равной максимальной силе трения покоя (1.1.2.9) для шкафа. Сравнить описанный в условии способ приложения силы и вариант, когда сила напрямую прикладывается к шкафу, без пружины и бруска.

13. Придерживая штатив, отвести нить от вертикального положения влево. В какой-то точке C нить пересекает вертикальную плоскость, в которой находится центр масс системы «штатив + шарик на нитке». Отпустим шарик без толчка, он будет двигаться вправо, а штатив — ему навстречу. При этом точка C останется неподвижной, и для шарика это выглядит так, как будто он колеблется на более короткой нитке, чем l, закрепленной в точке C. Найти эту укороченную длину и использовать формулу Гюйгенса (1.1.5.5) для периода маятника с этой длиной. Конечно, неподвижность точки C нужно доказать, используя сохранение горизонтальной проекции импульса системы.

14. В равновесии сумма сил, приложенных к шарику, равна нулю (1.1.3.2). Это определяет угол отклонения нити от вертикали в равновесном положении. Удобно сумму силы тяжести и кулоновской силы (3.1.1.3) рассматривать как одну силу $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}_\text{K}$. В равновесии нить натянута вдоль вектора $\vec{F}$. При отыскании частоты малых колебаний вокруг этого положения нити удобно на рисунке вектор $\vec{F}$ направить вертикально вниз, чтобы вывод формулы для частоты малых колебаний был похож на вывод формулы Гюйгенса (1.1.5.5).

15. Использовать связь длины волны и частоты (1.1.5.9). Необходимую скорость волны найти по заданному времени и расстоянию.

16. Использовать связь частоты, скорости и длины волны звука (1.1.5.9).

17. Учесть, что за измеренное время звуковая волна прошла расстояние до стены и обратно.

18. По рис. 1.72 видно, что зависимость давления от координаты в волне в рассматриваемый момент времени описывается уравнением $p(x) = p_0 \cos kx$. Нужно по графику определить значение косинуса в точке A и подобрать фазу из условия непрерывности, зная, что в начале координат фаза волны равна нулю.

19. Воспользоваться связью между частотой, скоростью и длиной волны звука (1.1.5.9).

20. Частота звука задается источником и не изменяется при переходе волн из одной среды в другую. Скорость звука характеризует среду и в разных средах разная. Связь между длиной волны, частотой и скоростью волны сохраняется при переходе волны в другую среду, хотя длина волны и скорость звука изменяются.

21. Написать уравнения волн (1.1.5.8) одинаковой амплитуды и частоты, бегущих в противоположных направлениях. Используя принцип суперпозиции, найти результирующее распределение давления при распространении в среде двух встречных волн. Расстояние между точками с нулевой амплитудой считать равным расстоянию между минимумами колебаний, заданному в условии.

22. Использовать определение фазы волны (1.1.5.8). В задаче спрашивается о разности фаз колебаний в двух точках в один и тот же момент времени.

23. Времена распространения звука от динамиков до точки B разнятся на период волны. Это условие дает одно уравнение для времен. Второе уравнение с временами можно получить из теоремы Пифагора, разделив входящие в нее расстояния на скорость волны.

24. Представим, что наблюдатель стоит на земле в точке A и над ним на высоте h в точке B закреплен динамик в виде шара, способный излучать звук во все стороны (рис. 1.83). Наблюдатель слышит звук из динамика. Вдруг начинает дуть сильный ветер справа налево, и скорость ветра $v_в$ больше скорости звука. Наблюдатель перестает слышать динамик — ветер «сносит» звук, как сильное течение воды в реке сносит пловца, пытающегося переплыть речку поперек. Если идти от точки A влево, то область,

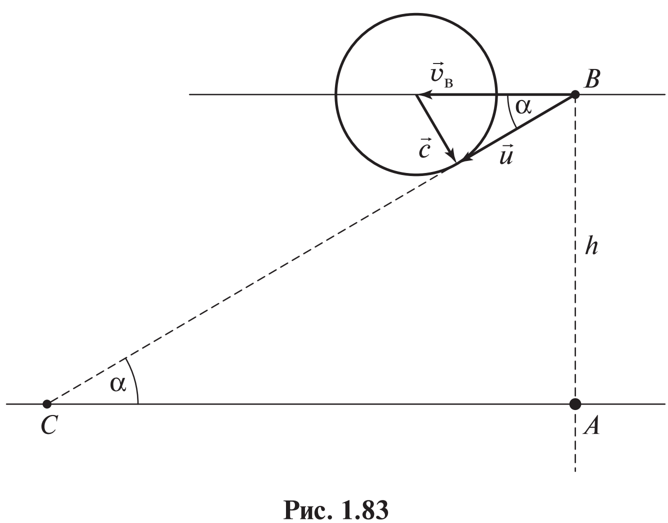

Рис. 1.83

в которой слышен звук от динамика, начнется в точке C. Найдем положение этой точки. Скорость звука $\vec{u}$ относительно земли с учетом ветра равна $\vec{u} = \vec{v}_{в} + \vec{c}$. В этом уравнении вектор $\vec{c}$ по модулю равен скорости звука относительно воздуха, а по направлению может быть любым — звук испускается во все стороны. Если нарисовать окружность с радиусом, равным скорости звука, и центром на конце вектора $\vec{v}_{в}$, то на этой окружности будут лежать концы всех возможных векторов $\vec{u}$. В точку C приходит звук, соответствующий скорости $\vec{u}$, направленной по касательной к окружности. Отсюда для угла α получается соотношение $\sin\alpha = \dfrac{c}{v_{в}}$.

Перейдем к сверхзвуковому самолету. Он летит со скоростью $\vec{v}$ и в начальный момент находится над наблюдателем в точке B. Перейдем в систему отсчета, связанную с самолетом. В этой системе по определению самолет неподвижен, а воздух движется со скоростью $-\vec{v}$, т.е. имеется ветер, дующий влево. Считая скорость самолета известной, нужно получить выражение для времени запаздывания звука. В условии оно задано и может быть использовано для нахождения скорости самолета.

25. В задаче нужно рассмотреть многократные проявления эффекта Доплера (1.1.5.14). Локатор на авианосце выступает как движущийся источник, а потом — как движущийся приемник, т.е. нужно два раза учитывать доплеровское смещение частоты. Учесть, что движутся как источник волны, так и предмет, от которого отражается волна.

26. А. При деформации, равной $\Delta_{отр}$, верхняя шайба, дойдя до максимальной высоты, идет вниз, т.е. колеблется так, как будто нижняя шайба закреплена.

Б. Нить натянута, начальная деформация Δ пружины — в интервале $\Delta_{р} < \Delta < \Delta_{отр}$. Для описания колебаний верхней шайбы удобно ввести вертикальную ось y, направленную вверх и начинающуюся в положении равновесия. Искомая высота $h(t)$ равна сумме равновесной высоты $h_{р}$ и y-координаты верхней шайбы. После пережигания нити возникают незатухающие колебания верхней шайбы вокруг ее равновесного положения.

Учебное издание

Левиев Григорий Иосифович
Трунин Михаил Рюрикович

Физика: научись решать задачи сам

Учебное пособие

Второе издание, пересмотренное

Зав. книжной редакцией *Е.А. Бережнова*
Редактор *Т.Г. Паркани*
Компьютерная верстка и графика: *А.И. Паркани*
Корректор *А.В. Беляева*
Дизайн обложки: *И.В. Ветров*

Все новости издательства — http://id.hse.ru

По вопросам закупки книг обращайтесь в отдел реализации
Тел.: +7 499 611-24-16, +7 495 624-40-27
bookmarket@hse.ru

Подписано в печать 20.06.2023. Формат 70×100 1/16. Гарнитура Newton
Печать офсетная. Усл. печ. л. 55,9. Уч.-изд. л. 33,5
Тираж 600 экз. Изд. № 2713. Заказ №

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
101000, Москва, ул. Мясницкая, 20
Тел.: +7 495 624-40-27

Отпечатано в АО «ИПК «Чувашия»
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 13
Тел.: +7 495 624-40-27