Переводные

учебники ВШЭ

Charalambos D. Aliprantis
Subir K. Chakrabarti

Games and Decision Making

Second edition

Караламбос Д. Алипрантис
Субир К. Чакрабарти

Игры и принятие решений

Перевод с английского
С.В. БУСЫГИНА
под научной редакцией
В.П. БУСЫГИНА

Издательский дом Высшей школы экономики
Москва 2016

УДК 519.8(075)
ББК 22.18я7
А50

Подготовлено в рамках проекта ВШЭ
по изданию переводов учебной литературы

Алипрантис, К. Д., Чакрабарти, С. К.

А50 Игры и принятие решений [Текст] : учеб. пособие / К. Д. Алипрантис, С. К. Чакрабарти ; пер. с англ. С. В. Бусыгина ; под науч. ред. В. П. Бусыгина ; сост. указ. В. П. Бусыгина ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». — М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2016. — 543, [1] с. — (Переводные учебники ВШЭ). — 1000 экз. — ISBN 978-5-7598-1097-1 (в пер.).

Учебник написан с целью представить сложные концепции современной теории решений для читателя, знакомого лишь с элементарным дифференциальным исчислением и элементарной теорией вероятности. Это автономная трактовка практически всего, что может быть названо теорией решений, — от классической теории оптимизации до современной теории игр. Книга содержит множество приложений из экономики, политической науки, финансов и менеджмента и примеров, призванных показать необходимость изучения теории и продемонстрировать границы, внутри которых она применима. Сначала авторы рассматривают наиболее простые варианты принятия решений — такие, в которых участвует только одно лицо, затем постепенно переходят к более сложным задачам, вплоть до анализа секвенциальной рациональности, и наконец объясняют, каким образом полученный интеллектуальный капитал может быть использован для изучения практических проблем — аукционов и торга. Особенность учебника заключается в том, что авторы трактуют теорию принятия решений и теорию игр как часть одной и той же совокупности знания. Теория принятия решений с участием одного лица используется в учебнике как строительный блок для теории игр.

Для студентов вузов, обучающихся по направлениям «Экономика», «Математика», изучающих вводные курсы по оптимизации и теории игр, а также для слушателей курсов MBA по теории принятия решений.

УДК 519.8(075)
ББК 22.18я7

Games and Decision Making, Second Edition was originally published in English in 2012. This translation is published by arrangement with Oxford University Press.

ISBN 978-0-1953-0022-2 (англ.)

ISBN 978-5-7598-1097-1 (рус.)

Оглавление

Предисловие к русскому изданию

По замыслу авторов этой книги, она представляет собой введение в теорию принятия решений, которое включает и классическую теорию оптимизации (теорию принятия решений одним лицом), и теорию торга — модели ситуации, где контрагенты сделки (продавцы и покупатели) последовательно делают предложения и контрпредложения об условиях сделки, и (некооперативную) теорию игр. Последняя изучает принятие решений несколькими лицами в так называемых стратегических ситуациях, т.е. в ситуациях, когда на результат решений одних индивидов влияют решения других. Таким образом, авторы данного учебника рассматривают эти три теории как части единого целого, подчеркивая взаимосвязь между проблемами принятия решений одним лицом и несколькими (взаимодействующими друг с другом) индивидами.

Напомним, что идеи, модели и методы теории принятия решений, и прежде всего теории игр, в отличие от других математических дисциплин, мотивируются не физическими, а социальными феноменами. И в частности, теория игр — это фактически «математика конфликта и сотрудничества». Это обстоятельство, кстати, существенно обесценивает аргументы противников применения математических методов в обществоведении, многие из которых формулируются как претензии к моделям и методам, сформировавшимся при исследовании физических феноменов, и сводятся к тому, что успех этих моделей и методов в одной области исследований вовсе не оправдывает их некритическое использование в другой.

Как раздел математики теория игр формируется «почти» на наших глазах, за какие-нибудь 40 лет, с 50-х по 80-е годы прошлого века, одновременно совершая революцию в обществоведении, внося существенные изменения как в способы моделирования общественных феноменов, так и в методы их исследования. Концепции решения игр, которые обсуждает теория игр, можно рассматривать как развитие концепции рационального поведения — краеугольного камня в фундаменте неоклассической экономической теории — и ее распространение на стратегические ситуации. Это предоставило возможность исследователям освободить экономическую теорию от во многом искусственных предпосылок типа гипотезы совершенных рынков, симметричной информации и т.д. и распространить плодотворную идею рационального поведения на новые области исследований. Фактически при активном участии теории игр экономическая теория, прежде всего микроэкономика, превращается из науки, занимающейся производством и распределением материальных благ (по содержанию), в науку о стимулах, порождаемых социальными институтами, и влиянии этих стимулов на поведение и приложение теории игр (по форме). Поэтому изучение теоретико-игрового инструментария анализа социально-экономических феноменов представляется необходимым этапом обучения обществоведа, экономиста в частности, — что и отражают программы подготовки таких специалистов в ведущих университетах.

По прошествии определенного времени, «когда была найдена форма, адекватная простоте содержания дисциплины», стали появляться многочисленные учебные пособия по теории игр, прежде всего на английском языке, ориентированные на разные целевые аудитории. И хотя некоторые великолепные монографии, отражающие состояние теории игр на более раннем этапе ее жизни, переведены на русский язык (Р.Д. Льюс, Х. Райфа «Игры и решения; Г. Оуэн «Теория игр»; Дж. Мак-Кинси «Введение в теорию игр» и др.), переводов книг, представляющих современное ее состояние, практически нет, за исключением изданной на русском языке замечательной презентации возможностей современной теории игр в популярной форме — книги А.К. Диксита и Б. Нэлбаффа «Теория игр. Искусство стратегического мышления в бизнесе и жизни», которая вряд ли может служить пособием для, в частности, полноценного бакалаврского курса.

Представляется, что лежащая перед вами книга таким пособием является. Она поможет хотя бы частично заполнить указанный пробел, а также станет хорошим дополнением к соответствующим учебным пособиям российских авторов. По замыслу авторов этого учебника, он представляет собой «междисциплинарный бакалаврский курс с существенным математическим содержанием» и призван продемонстрировать возможности и ограничения математических методов анализа общественных феноменов. Для этого в него включены многочисленные примеры приложений теории к экономике, политологии, финансам и менеджменту.

Изложенный материал будет доступен читателю с достаточно скромной математической подготовкой, включающей вводные разделы дифференциального исчисления и дискретной математики. Впрочем, все необходимые сведения из указанных дисциплин представлены в самой книге. Тем не менее усвоение некоторых разделов курса, прежде всего доказательств существования соответствующих концепций решения (равновесия) игр, приведенных в заключительной, девятой главе, требует известной аналитической культуры. Но, как представляется, читатели, интересующиеся главным образом приложениями теории и предлагаемыми методами анализа, могут соответствующие разделы, по крайней мере при первом чтении, опустить.

Книга может служить в качестве учебника для студентов бакалавриата многих специальностей, желающих ознакомиться с теорией принятия решений, например, студентов экономических, бизнес- и даже математических факультетов, а также для тех, кто желает самостоятельно овладеть приемами анализа решений. Кроме того, она может использоваться как учебное пособие при изучении более продвинутых курсов по теории принятия решений, теории игр.

В.П. Бусыгин,
научный редактор перевода

Посвящается нашим женам и детям:
Бернадетт и Тухине;
Клэр, Дионисси,
Анише, Девике и Шармите

Предисловие

Второе издание книги «Игры и принятие решений» построено на характерных для первого издания сильных сторонах и расширяет и развивает их, чтобы книга представляла собой достаточно полное и детальное изложение теории игр. Так, во втором издании добавлены две новые главы и несколько новых разделов в семи первоначальных главах. В то время как первое издание соединяет элементы теории принятия решений и теории игр и делает это достаточно оригинальным способом, второе издание идет дальше в направлении более полного представления собственно теории игр. В нем сохранен почти в полном объеме материал первого издания с небольшими модификациями некоторых примеров и некоторой реорганизацией глав.

Изменения во втором издании

- Глава 2 включает достаточно много нового материала с существенно более тщательным обсуждением смешанных стратегий, раздел о наилучших ответах и равновесии по Нэшу, более обширный список известных примеров матричных игр и новый раздел об играх в стратегической форме с неполной информацией и равновесии Байеса — Нэша. Добавлено несколько новых примеров и в раздел о приложениях, прежде всего о приложениях к теории игр экономической теории.
- Глава 4, как и глава 2, расширена достаточно сильно, добавлено несколько новых примеров приложения динамических игр. В разделе о приложениях динамических игр есть теперь несколько приложений из экономической теории.
- Главы 5 и 6 — главы об аукционах и торге из первого издания. В главе 5 появился новый раздел об эквивалентности доходов. Глава 6 в основном повторяет главу о торге из первого издания, хотя мы перенесли материал о торге при неполной информации в главу 8.
- Глава 7 «Повторяющиеся игры» в первом издании отсутствовала.
- Глава 8 «Секвенциальная рациональность» основана на материале главы 5 первого издания. В ней появились два новых раздела: «Совершенное байесовское равновесие» и «Сигналинговые игры». Она включает также скорректированный материал о торге при неполной информации, а также несколько новых примеров в разделе «Приложения».
- Последняя, девятая глава — новая и ориентируется на литературу о существовании разных типов равновесий, рассмотренных в предыдущих главах. Материал этой главы — важная часть основы теории игр. Она дает возможность понять, как выводятся и конструируются различные равновесные точки.

- В то время как первое издание книги ориентируется на то, чтобы дать возможность достаточно подготовленному студенту серьезно изучить сочетание теории принятия решений и теории игр на основе дифференциального исчисления как основного инструмента анализа, второе издание приближается скорее к достаточно обстоятельному учебному пособию по теории игр. Мы полагаем, что материал книги окажется полезным даже для достаточно подготовленных студентов.
- Второе издание теперь покрывает большую часть стандартного материала по теории игр, включая повторяющиеся игры и игры с несовершенной и неполной информацией. Оно также содержит достаточно строгое изложение фундаментальных результатов относительно существования.

И хотя книга включает бóльшую часть проблематики теории игр, в ней рассмотрены не все вопросы. Так, хотя материал и включает некоторые усиления концепции равновесия по Нэшу, он, тем не менее, не покрывает эту проблематику теории игр исчерпывающим образом. В результате остались не освещенными понятия, подобные совершенному равновесию дрожащей руки и собственному равновесию, хотя вполне можно утверждать, что они являются и полезными, и интересными. Не представлен и материал по эволюционной теории игр. При выборе материала мы отдавали предпочтение наиболее полезным и значимым понятиям, имеющим широкое приложение.

В целом книга является попыткой представить достаточно проницательным читателям теорию игр и теорию принятия решений в сочетании, насколько это возможно, с их приложениями к экономике и другим дисциплинам. Следовательно, при каждом удобном случае мы добавляли раздел о приложениях, который иллюстрирует использование теории. Мы старались представить понятия теории в достаточно строгом виде, но в то же время привести примеры использования теории при анализе важных основных проблем в экономике и других дисциплинах.

Наконец, мы хотели бы высказать благодарность всем тем, кто обсуждал и рецензировал текст, и особенно д-ру Эфе Оку из Университета Нью-Йорка, д-ру Катри Сиберг из Университета Бирмингема и д-ру Кларку Робертсону из Северо-Западного университета.

Глава 1 ВЫБОР

Индивиды и группы часто должны принимать решения в многочисленных и различных ситуациях. Как индивиды, мы должны принимать решения о том, как распределить наш доход. Фирма должна принимать решения относительно действий, которые ей необходимо предпринять для того, чтобы эффективно конкурировать на рынке. Правительствам нужно принимать решения относительно их внешней политики, внутренней политики, фискальной и денежной политики. Студентам нужно выбирать курсы в каждом семестре. Многообразие ситуаций, в которых индивиды должны принимать решения, действительно очень впечатляет.

Столкнувшись с необходимостью принять решение, мы всегда пытаемся понять, какое решение было бы наилучшим. Зачастую мы тратим огромное количество времени и энергии, прилагая отчаянные усилия, чтобы решить, что же делать. В одних и тех же условиях различные индивиды могут делать совершенно разный выбор. Кто из них прав? Принял ли один индивид хорошее решение, а другой — плохое? Очевидно, что ответы на данные вопросы зависят от критерия, который используется для оценки решений. Как хорошо известно, индивиды преследуют различные цели и имеют разные интересы, которые могут влиять на принимаемые ими решения.

Задача принятия решения обычно содержит поставленную цель и множество альтернативных выборов для ее достижения. Следовательно, задача принятия решения, или оптимизационная задача, имеет целевую функцию (желаемую цель) и допустимое множество, или множество выбора (множество альтернативных выборов). Тогда вопрос состоит в том, какой выбор окажется лучшим для достижения заданной цели.

В этой главе мы обрисуем некоторые основные принципы математической теории оптимизации. Мы стремимся не засыпать вас техническими деталями, а представить некоторые наиболее важные результаты в этой области. Мы также продемонстрируем, как методы оптимизации могут быть использованы не только для принятия правильных решений, но и, что более важно, для того, чтобы показать, как формулировать и моделировать задачи принятия решений.

1.1. Функции

Функция — основное понятие в математике. Понятие функции существенно для изучения как самой математики, так и ее приложений. Здесь оно также будет иметь фундаментальное значение.

В дифференциальном исчислении обычно полагают, что функция — это «формула» $y = f(x)$, которая устанавливает отношение между двумя перемен-

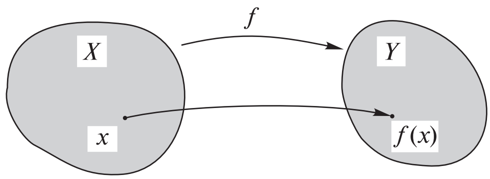

Рис. 1.1

ными x и y. Переменная x называется **независимой переменной**, а y — **зависимой переменной**. Например,

$$y = x^2,\ \ y = \sqrt{x-2},\ \ y = \frac{x+1}{x-1}$$

являются функциями. Множество всех значений переменной x, для которых формула $f(x)$ имеет «алгебраический смысл», называется **областью определения** функции. Например, область определения функции $y = x^2$ — множество R всех вещественных чисел[1], а область определения $f(x) = \sqrt{x-2}$ состоит из всех вещественных чисел, для которых $x - 2 \geq 0$, т.е. $[2; \infty)$.

Понятие функции является намного более широким, чем было показано выше, и оно тесно связано с понятием множества. Вспомним, что **множество** может быть интуитивно определено как набор объектов (или элементов), рассматриваемых как единое целое; как это принято, будем обозначать множества прописными буквами. **Функция** f обычно определяется как «правило», по которому каждому элементу x из множества X ставится в соответствие единственный элемент $y = f(x)$ из множества Y. Элемент x называется **входом**, а элемент $f(x)$ — **выходом**. Схематично функцию f обозначают как $f: X \to Y$, и ее геометрическая иллюстрация приведена на рис. 1.1. Множество X теперь называется областью определения функции. В случае если $Y = R$, f называется **функцией вещественной переменной**.

Вот некоторые примеры функций.

- Определим функцию вещественной переменной $f: R \to R$ с помощью формулы $f(x) = 3x$. Таким образом, правило f информирует нас о том, что если x — вещественное число, то для нахождения выхода $f(x)$ нужно умножить x на 3. Например, $f(2) = 6$, $f(-3) = -9$ и $f(0) = 0$.
- Пусть X обозначает собрание книг в вашей библиотеке, $N = \{1, 2, 3...\}$ (множество **натуральных чисел**). Определим функцию $f: X \to N$ по правилу: $f(x)$ = число страниц в книге x. Например, если книга b содержит 235 страниц, значит, $f(b) = 235$.
- Пусть A обозначает собрание всех машин в вашем городе, а B — множество всевозможных цветов. Тогда можно рассмотреть функцию c, которая присваивает каждой машине какой-то цвет. То есть $c: A \to B$ — правило, которое выбранной машине x ставит в соответствие ее цвет $c(x)$. Если машина a желтого цвета, следовательно, $c(a)$ = желтый, и если x — красная машина, то $c(x)$ = красный.

[1] Всюду в этой книге символ R обозначает множество всех вещественных чисел.

- Пусть множество B — множество всех птиц в лесу, а T — множество всех деревьев в том же лесу. Можно определить функцию $f : B \to T$ по правилу: если b — птица, то $f(b)$ — дерево, на котором находится ее гнездо.
- Предположим, что P обозначает множество всех людей, живущих в США, и пусть C — совокупность всех представителей конгресса США. Определим функцию $f : P \to C$ так, что $f(a)$ — представитель конгресса того района, где проживает индивид a.

Предлагаем читателю подумать над примерами других функций из повседневной жизни.

Упражнения

1. Найти область определения функции $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

2. Рассмотрим множество P всех индивидов, проживающих в настоящее время в вашем городе. Определите, какие из нижеперечисленных правил являются функциями.

(a) Для каждого человека x его отец — $f(x)$.
(b) Для каждого человека x его сын — $g(x)$.
(c) Для каждого человека x его рост — $h(x)$.
(d) Для каждого человека x его вес — $w(x)$.

3. Пусть A — множество всех почтовых адресов в вашем городе и I — совокупность всех отправлений в заданный день в почтовом отделении города, которые должны быть доставлены адресатам. Для каждого отправления i пусть

$f(i)$ = почтовый адрес,
по которому оно должно быть доставлено.

Определяет ли это правило функцию на множестве I со значениями во множестве A (из I в A)?

4. Рассмотрим множество натуральных чисел $X = \{1789, 1790, 1791, \ldots, 2008\}$ и множество P всех президентов США. Определим функцию $f : X \to P$ по правилу:

$f(x)$ = президент США на первое декабря года x.

Например, $f(1826)$ = Дж.К. Адамс, $f(1863)$ = А. Линкольн, $f(1962)$ = = Дж.Ф. Кеннеди, $f(1971)$ = Р.М. Никсон. Каковы значения функции $f(1789)$, $f(1900)$, $f(1947)$, $f(1988)$, $f(1996)$, $f(2004)$ и $f(2008)$?

5. Пусть X и P — множества, определенные в предыдущем упражнении. Для каждого года x из X положим

$f(x)$ = президент США на 22 ноября года x.

Определяет ли это правило функцию из X в P?

6. Пусть B обозначает собрание книг в вашей библиотеке, и пусть для каждой книги x $f(x)$ будет автором этой книги x. Является ли предложенное правило функцией? Если не является, каким образом можно модифицировать его, чтобы оно стало функцией?

1.2. Оптимизационные задачи

Не будет преувеличением сказать, что каждый раз, принимая решение, мы сталкиваемся с задачей оптимизации. Когда мы идем в магазин, например «Волмарт» (Wallmart), у нас имеется список вещей, которые хотели бы купить. Но каковы бы ни были наши намерения, приходится сталкиваться с выбором. Следует ли приобрести самый дешевый бренд? Или лучше выбрать бренд подороже, но более высокого качества? Или вопрос может состоять в том, нужны ли нам еще брюки или же взять еще одну юбку? Собираясь купить дом, семья должна решить, нужен ли ей большой дом или дом поменьше, но в нужном месте. Каждый год федеральное правительство должно утверждать бюджет после принятия решения о том, какое финансирование получит каждая программа. В экономике центральным моментом теории потребления является выбор, который делает потребитель. В теории фирмы фирма решает, каким образом максимизировать прибыль и минимизировать издержки.

Все эти задачи с принятием решений имеют общую характерную черту. Существует множество альтернатив Ω, из которых нужно выбирать. Если индивиду, зашедшему в «Волмарт», нужно купить брюки, у него может быть более десятка альтернатив. В случае семьи, приобретающей дом в заданном диапазоне цен (т.е. при данном бюджете), может быть доступно много различных вариантов домов, расположенных в самых разных местах. Тогда эти варианты определяют множество Ω альтернатив для семьи. Как мы вскоре увидим, у потребителя в теории потребления есть множество выбора, как и у фирмы в теории фирмы.

Еще одна общая характеристика всех решений состоит в том, что лицу, принимающему решение, необходимо выработать некоторый критерий выбора из альтернатив. Другими словами, лицо, принимающее решение, должно иметь некоторое «ранжирование» различных альтернатив из множества выбора. Эти «ранжирование» представляется вещественнозначной функцией $f:\Omega \to R$, причем более высокое значение, приписываемое альтернативе этой функцией, означает, что она имеет более высокий «ранг», чем альтернатива с более низким значением.

Понятия множества и функции, представленные в предыдущем разделе, являются основными инструментами для описания оптимизационных задач. В абстрактной форме оптимизационная задача состоит из множества Ω (которое называется **множеством выбора** или **допустимым множеством**[1]) и функции $f:\Omega \to R$ (которая называется **целевой функцией**). Цель при этом — выбор такой альтернативы из множества Ω, которая максимизирует или минимизирует значение целевой функции *f*. То есть лицо, принимающее решение, решает одну из задач:

(1) максимизировать $f(\omega)$ при условии $\omega \in \Omega$;

(2) минимизировать $f(\omega)$ при условии $\omega \in \Omega$.

---

[1] Множество выбора также называют **множеством ограничений**, **достижимым множеством** или даже **множеством альтернатив**.

Поскольку минимизация $f(\omega)$ при условии $\omega \in \Omega$ эквивалентна максимизации $-f(\omega)$ при условии $\omega \in \Omega$ (объясните, почему), то обе задачи могут быть объединены в следующую общую оптимизационную задачу[1]:

Оптимизационная задача

Максимум $f(\omega)$
при условии $\omega \in \Omega$

Любой выбор $\omega^* \in \Omega$, на котором достигается максимум целевой функции f (т.е. $f(\omega^*) \geq f(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$), называется **точкой максимума** (или **точкой оптимума**) f на множестве выбора Ω.

Проиллюстрируем идею оптимизационной задачи на некоторых общих примерах.

Пример 1.1. Предположим, что потребитель зашел на рынок, чтобы купить яблок и апельсинов, затратив при этом не более 12 долл. Яблоки стоят 1 долл. за фунт, а апельсины 2 долл. за фунт.

Потребитель не только хочет приобрести наибольший возможный «набор» яблок и апельсинов, но и получить наибольшее возможное «удовлетворение». На практике удовлетворение (или вкус) потребителя выражается в терминах функции, известной как **функция полезности**. В данном случае будем полагать, что функция полезности задана в виде $u(x, y) = xy$.

Пара (x,y) представляет возможный «набор» яблок и апельсинов, который потребитель может купить. Поскольку $u(2,3) = 6 > 4 = u(4,1)$, то он предпочтет набор (2,3) (2 фунта яблок и 3 фунта апельсинов) набору (4,1) (4 фунта яблок и 1 фунт апельсинов).

Стоимость (в долларах) набора (x,y) — это просто число $x + 2y$. Ограничение в 12 долл., таким образом, говорит нам, что допустимые наборы должны удовлетворять условию $x + 2y \leq 12$. Другими словами, множество альтернатив покупателя имеет вид

$$\Omega = \{(x, y) \in R^2 : x \geq 0,\ y \geq 0 \quad \text{и} \quad x + 2y \leq 12\}.$$

Теперь можем записать, что задача покупателя состоит в максимизации $u(x, y) = xy$ при условии $(x, y) \in \Omega$. ■

Пример 1.2. Промоутер общественных мероприятий хочет определить цену билета на предстоящее событие исходя из максимизации своего дохода. По своему недавнему опыту он знает, что если установить цену в размере 12 долл. за человека, то мероприятие посетит порядка 1200 людей. Опыт также подсказывает ему, что каждое увеличение стоимости билета на 1 долл. приведет к снижению посещаемости на 150 человек, а уменьшение стоимости на тот же 1 долл. — к увеличению на 150 человек. Дополнительно

[1] Слово *оптимизация* происходит от латинского слова optimum, что значит «наилучший».

ему известно, что каждый посетитель потратит в среднем 6 долл. в торговых лотках на товары, продаваемые по концессии. Задача промоутера состоит в определении, *какой должна быть входная цена*, *чтобы максимизировать совокупный доход.*

Чтобы сформулировать эту задачу как задачу оптимизации, действуем следующим образом. Обозначим через x величину, на которую цена входного билета превышает 12 долл. (отрицательная величина x означает, что цена ниже 12 долл. на $-x$ долл.). То есть пусть цена за билет равна $12 + x$ долл. Тогда мероприятие посетит $1200-150x$ человек, а концессия принесет доход $6(1200-150x)$ долл. Обозначим через $R(x)$ доход промоутера, который был бы получен при увеличении цены входного билета на x долл. (сверх 12 долл.). Тогда

$$R(x) = \text{Доход от билетов} + \text{Доход от концессий} =$$

$$= (\text{Число людей}) \times (\text{Цена билета}) + 6(\text{Число людей}) =$$

$$= (1200-150x)(12+x)+6(1200-150x) =$$

$$= (1200-150x)(18+x) =$$

$$= -150x^2 - 1500x + 21\,600\,.$$

Таким образом, задача промоутера — максимизировать

$$R(x) = -150x^2 - 1500x + 21\,600$$

при условии $x > -12$, или $x \in (-12, \infty)$. ■

Пример 1.3. Экспериментальные данные позволяют предположить, что концентрация наркотика в крови человека (измеренная в миллиграммах на литр) через t часов после инъекции описывается уравнением

$$C(t) = \frac{t}{t^2+9}\,.$$

Когда наблюдается максимальная концентрация?

То есть через сколько часов после инъекции концентрация наркотика максимальна? В терминах теории оптимизации требуется решить следующую задачу: максимум $C(t)$ при условии $t \geq 0$. ■

Пример 1.4. Предположим, что цена бушеля пшеницы составляет 4 долл., а цена удобрения за фунт — 0,25 долл. Фермер подметил, что при использовании n фунтов удобрения на акр он получает $\sqrt{n+30}$ бушелей пшеницы на акр. *Сколько фунтов удобрения на акр посевной площади максимизирует прибыль фермера*?

Из формулы Прибыль = Доход – Издержки видно, что прибыль на акр составляет

$$P(n) = 4\sqrt{n+30} - 0{,}25n\,.$$

Фермер должен максимизировать $P(n)$ при условии $n \geq 0$. ■

Пример 1.5. Владелец автосалона ежегодно продает 200 машин. Складирование одного автомобиля обходится ему в 100 долл. в год. Стоимость заказа новых автомобилей с завода составляет фиксированную величину в 100 долл. и 80 долл. дополнительно за каждую машину. *Сколько раз в год и какой объем партии следует заказывать, чтобы минимизировать годовые расходы на создание и хранение запасов*?

Чтобы сформулировать соответствующую задачу оптимизации, обозначим через x объем партии заказа (конечно, $x > 0$). Тогда количество заказов будет равным $200/x$. Поскольку стоимость заказа партии объемом x составляет величину $100 + 80x$, совокупная стоимость всех заказов будет равна

$$(100 + 80x) \times \frac{200}{x} = \frac{20\,000}{x} + 16\,000 \text{ долл.}$$

С другой стороны, будем предполагать, что из x машин в среднем половина находится на хранении, так что годовая стоимость складирования составит $100 \times \frac{x}{2} = 50x$ долл. Таким образом, совокупные издержки владельца автосалона за год составят

$$C(x) = 50x + \frac{20\,000}{x} + 16\,000 \text{ долл.}$$

Для решения задачи остается лишь минимизировать функцию $C(x)$ при условии $x > 0$. ■

Упражнения

1. По эмпирическим данным компанией был оценен спрос на определенный продукт:

$$D(p) = 120 - 2\sqrt{p}\ ,$$

где p — цена продукта в долларах. Сформулируйте оптимизационную задачу для компании, максимизирующей выручку по цене продукта p. [Ответ: $R(p) = 120p - 2p^{3/2}$.]

2. Производитель телевизоров определил, что для продажи x телевизоров цену нужно установить равной

$$p = 1200 - x\ .$$

Издержки при производстве x телевизоров составляют

$$C(x) = 4000 + 30x\ .$$

Сформулируйте оптимизационную задачу для максимизации прибыли производителя. [Ответ: $P(x) = -x^2 + 1170x - 4000$.]

3. Вы заходите в цветочный магазин с 20 долларами в кармане и планируете потратить все деньги на букет из гвоздик и роз. Каждая гвоздика стоит 1 долл., роза — 3 долл. Пусть ваше удовлетворение описывается функцией полезности $u(x, y) = x^2 y^3$ (где x — количество гвоздик,

y — количество роз в букете). Решение какой оптимизационной задачи даст наиболее удовлетворительный для вас букет?

4. Владелец магазина электроники прогнозирует, что будет продавать каждый год 6000 батарей для калькуляторов. Стоимость каждой батарейки 0,25 долл. Издержки, связанные с заказом каждой новой партии батареек, составляют 20 долл. Хранение батарейки в течение года стоит 0,96 долл. Предположите, что владелец магазина размещает в год n заказов, так что размер x партии батареек при каждом заказе равен $6000/n$. Сформулируйте соответствующую задачу оптимизации в терминах размера партии, минимизирующего готовые издержки собственника магазина. [Ответ: владелец магазина должен минимизировать функцию издержек $C(x) = 0,48x + \dfrac{120\,000}{x} + 1500$.]

1.3. Условия первого и второго порядка

Решение оптимизационной задачи тесно связано со *скоростью изменения* целевой функции. Скорость изменения функции известна в математике как *производная* функции. **Производной** функции $f:(a,b) \to R$ в точке $c \in (a,b)$ называется предел (если он существует)

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}\ .$$

Если функция имеет производную в точке c, то говорят, что она **дифференцируема** в этой точке. Как отмечалось ранее, производная $f'(c)$ представляет скорость изменения функции $f(x)$ в точке c относительно изменения x. Постоянные функции имеют нулевую скорость изменения, поэтому их производные также равны нулю.

Перечислим основные правила вычисления производных. Более детальная информация может быть найдена в любом вводном курсе по дифференциальному исчислению, например, см. [23] в библиографическом списке в конце книги.

Правила вычисления производных для:

- степенной функции: $(x^p)' = px^{p-1}$
- суммы функций: $(f + g)' = f' + g'$
- произведения функций: $(fg)' = f'g + fg'$
- частного функций: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

Цепное правило: $[f(g(x)] = f'(g(x))g'(x)$

Мы готовы теперь представить следующий основной результат теории оптимизации функций одной переменной, определенной на открытом интервале множества вещественных чисел. Точка c называется **критической** или

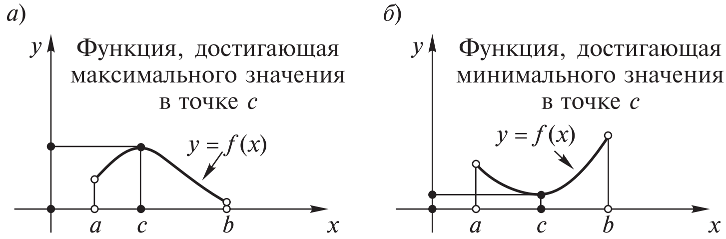

Рис. 1.2

стационарной точкой функции *f*, если значение ее производной в *c* равно нулю, т.е. $f'(c) = 0$.

> **Тест первого порядка на оптимальность**
>
> Пусть $f:(a,b) \to R$ дифференцируема и имеет единственную критическую точку $c \in (a,b)$, т.е. *c* является единственной точкой, в которой $f'(c) = 0$.
>
> - Если $f'(x) > 0$ для $x \in (a,c)$ и $f'(x) < 0$ для $x \in (c,b)$, то *f* достигает своего максимума в точке $x = c$, более того, *c* — единственная точка максимума функции *f* на интервале (a,b).
> - Если $f'(x) < 0$ для $x \in (a,c)$ и $f'(x) > 0$ для $x \in (c,b)$, то *f* достигает своего минимума в точке $x = c$, более того, *c* — единственная точка минимума функции *f* на интервале (a,b).

Данный результат называют **тестом первого порядка**, поскольку он включает только первую производную функции. Геометрический смысл максимума и минимума функции на открытом интервале (a,b) показан на рис. 1.2.

Если целевая функция имеет вторую производную, можно использовать следующий тест второго порядка для выявления природы стационарных точек. Напомним, что производная производной f' называется **второй производной** и обозначается как f''.

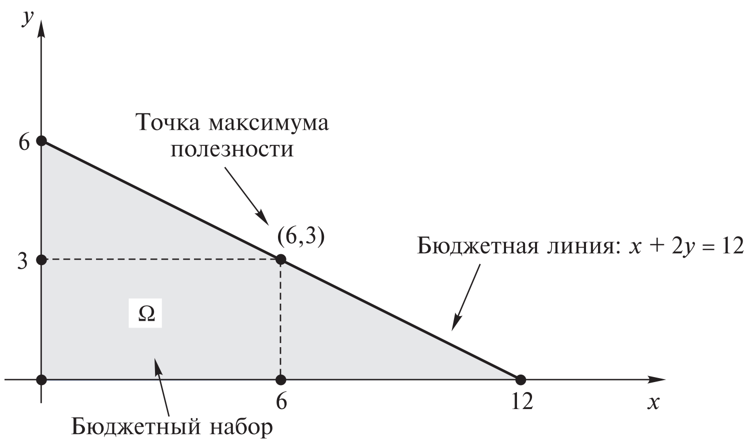

Рис. 1.3

Тест второго порядка на оптимальность

Пусть $f:(a,b)\to R$ дважды дифференцируема и имеет единственную критическую точку $c\in(a,b)$, т.е. c является единственной точкой, в которой $f'(c)=0$.

- Если $f''(c)<0$, то f достигает своего максимума в точке $x = c$, более того, c — единственная точка максимума функции f на интервале (a,b).
- Если $f''(c)>0$, то f достигает своего минимума в точке $x = c$, более того, c — единственная точка минимума функции f на интервале (a,b).

Продемонстрируем использование теста первого порядка на примере решений оптимизационных задач из предыдущего раздела.

Решение оптимизационной задачи из примера 1.1. Множество Ω показано на рис. 1.3. Обычно его называют *бюджетным множеством* потребителя. Линия $x+2y=12$ называется *бюджетной линией*. Заметим, что увеличение в наборе x и y строго увеличивает значение функции полезности $u = xy$. Это гарантирует, что точки максимума $u(x,y)$ будут лежать на бюджетной линии $x+2y=12$ (объясните, почему). Тогда замечаем, что

$$u=u(x,y)=xy=(12-2y)y=-2y^2+12y$$

и $0\le y\le 6$. Следовательно, мы должны максимизировать $u(y)=-2y^2+12y$ при условии $0\le y\le 6$. Так как $u(0)=u(6)=0$ [1], то достаточно максимизировать $u(y)=-2y^2+12y$ при условии $0<y<6$.

Вычисляя производную, получим: $u'(y)=-4y+12=-4(y-3)$. Из соотношения $u'(y)=0$ находим единственную критическую точку $y = 3$. Нетрудно видеть, что $u'(y)>0$ при $y<3$ и $u'(y)<0$ при $y>3$. В соответствии с тестом первого порядка получаем, что функция u достигает своего максимума при $y = 3$. Тогда $x=12-2y=12-2\times 3=6$.

Таким образом, набор (6,3) максимизирует функцию полезности $u(x,y)=xy$ на множестве Ω.

Решение оптимизационной задачи из примера 1.2. Необходимо найти максимум функции

$$R(x)=-150x^2-1500x+21\,600 \text{ при условии } x\in(-12;\infty).$$

Вынося за скобки –150, перепишем выражение в виде

$$R(x)=-150(x^2-10x+144).$$

Дифференцируя, получаем

$$R'(x)=150(-2x-10)=-300(x+5),$$

откуда находим, что $x=-5$ — единственная стационарная точка функции $R(\cdot)$. Более того, $R'(x)>0$ при $x<-5$ и $R'(x)<0$ при $x>-5$, следовательно, функция $R(x)$ достигает своего максимума в точке $x=-5$.

[1] А $u(1) = 10$. — *Примеч. пер.*

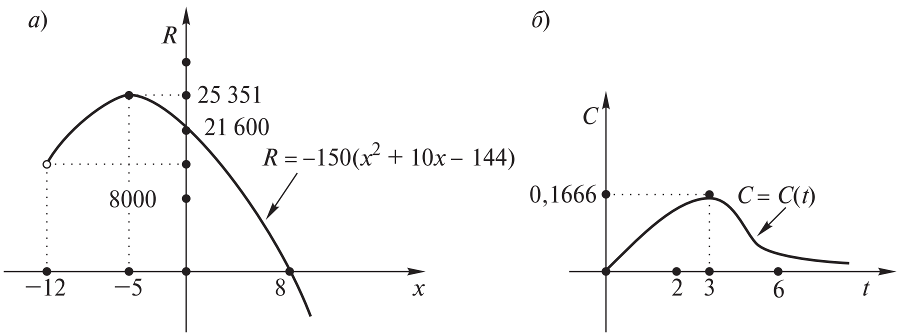

Рис. 1.4

Таким образом, уменьшение стоимости билета на 5 долл. позволяет получить максимальный доход $R(-5) = 25\,351$ долл. Другими словами, входная стоимость билета в размере $12 - 5 = 7$ долл. максимизирует доход. График функции $R(x)$ представлен на рис. 1.4, *а*.

Мы можем использовать также и тест второго порядка на оптимальность, заметив, что $R''(x) = -300$, так что $R''(-5) = -300 < 0$.

Решение оптимизационной задачи из примера 1.3. Дифференцируя функцию $C(t) = \dfrac{t}{t^2+9}$, использовав правило взятия производной от частного двух функций, получим

$$C'(t) = \frac{(t)'(t^2+9) - (t^2+9)'t}{(t^2+9)^2} = \frac{t^2+9-2t^2}{(t^2+9)^2} = \frac{9-t^2}{(t^2+9)^2}.$$

Для нахождения критических точек $C(t)$ мы должны решить уравнение $C'(t) = 0$. В нашем случае это означает, что мы должны решить уравнение $9 - t^2 = 0$. Решая, находим, что $t = \pm 3$. Однако, поскольку оптимизация осуществляется на интервале $[0, \infty)$, нужно рассматривать только критическую точку $t = 3$.

Теперь заметим, что $C'(t) > 0$ при $0 \le t < 3$ и $C'(t) < 0$ для всех $t > 3$. Согласно тесту первого порядка, $C(t)$ достигает максимума в точке $t = 3$. Соответственно максимальная концентрация наркотика равна $C(3) = \dfrac{3}{3^2+9} = \dfrac{1}{6} = 0{,}1666$ миллиграмм на литр и достигается через 3 часа после инъекции. График функции $C(t)$ показан на рис. 1.4, *б*.

Решение оптимизационной задачи из примера 1.4. В данном случае нужно найти оптимум функции

$$P(n) = 4\sqrt{n+30} - \frac{1}{4}n = 4(n+30)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}n \text{ при условии } n \in [0, \infty).$$

Дифференцируя, получаем

$$P'(n) = 4\frac{1}{2}(n+30)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} = \frac{8 - \sqrt{n+30}}{4\sqrt{n+30}}.$$

Решив уравнение $P'(n) = 0$, или $8 - \sqrt{n+30} = 0$, найдем критические точки. Последнее уравнение может быть переписано как $\sqrt{n+30} = 8$. Возводя в квадрат левую и правую части уравнения, получим $n + 30 = 64$, или $n = 34$.

Легко видеть, что $P'(n) > 0$ при $0 \le n < 34$ и $P'(n) < 0$ при $n > 34$. Согласно тесту первого порядка, $P(n)$ достигает максимума в точке $n = 34$. Таким образом, для максимизации прибыли фермеру следует использовать 34 фунта удобрений на акр. Величина максимальной прибыли на акр при этом составит

$$P(34) = 4\sqrt{34+30} - \frac{1}{4}34 = 4 \times 8 - 8{,}5 = 23{,}5\,.$$

Решение оптимизационной задачи из примера 1.5. Дифференцируем функцию издержек $C(x) = 50x + \dfrac{20\,000}{x} + 16\,000$ и получаем

$$C'(x) = 50 - \frac{20\,000}{x^2} = \frac{50(x^2 - 400)}{x^2} = \frac{50(x-20)(x+20)}{x^2}\,.$$

Откуда видно, что $C'(x) < 0$ при $0 < x < 20$, $C'(x) > 0$ при $x > 20$, $C'(20) = 0$. Так что, согласно тесту первого порядка, $x = 20$ является точкой минимума функции $C(x)$ на интервале $(0, \infty)$.

Другими словами, для минимизации затрат хранения владелец автосалона должен заказывать $\dfrac{200}{20} = 10$ раз в год партии в объеме 20 машин.

Упражнения

1. Найдите максимум и минимум следующих функций на указанных интервалах:
   (a) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ при $0 \le x \le 3$;
   (b) $g(t) = -t^2 + 2t + 4$ при $0 \le t \le 3$.
2. Функция издержек производителя имеет вид $C(x) = 2x^2 + 40x + 5000$. Продажная цена единицы товара на рынке равна 1000 долл. Сколько единиц продукции нужно производить, чтобы максимизировать прибыль? Какова величина максимальной прибыли? [Ответ: 240 единиц обеспечат максимум прибыли размером 110 200 долл.]
3. Температура больного (по Фаренгейту) в момент времени t (измеренного в днях с начала болезни) в первые пять дней может определяться как $T(t) = -0{,}3t^2 + 1{,}2t + 98{,}6$. Какова наивысшая температура больного и в какой день она должна наблюдаться? [Ответ: значение наивысшей температуры равно 99,8, наблюдается на второй день болезни.]
4. Производитель телевизоров определил, что для продажи x единиц новых телевизоров необходимо установить цену в размере $p = 960 - x$. Общие затраты на производство набора из x телевизоров описываются функцией издержек $C(x) = 4000 + 30x$. Сколько телевизоров необходимо производить, чтобы прибыль была максимальна? [Ответ: 465.]

5. Владелец 80-местного отеля знает, что все места окажутся занятыми, если плата за проживание составит 60 долл. в день. Обслуживание каждого занятого номера обходится в 4 долл. в день. По своему опыту владелец также знает, что если увеличить плату на x долл. свыше 60, то x мест при этом останутся свободными. Какая цена за номер в отеле принесет владельцу максимальную прибыль? [Ответ: 72 долл.]
6. Фирма по предоставлению кабельного телевидения обслуживает 20 000 домохозяйств, взимая плату в размере 30 долл. в месяц. Маркетинговое исследование выявило, что каждое снижение платы на 1 долл. увеличит число клиентов фирмы на 500, а увеличение платы на 1 долл. — уменьшит на 500 соответственно. Какой размер платы позволит фирме получать максимальную прибыль и какова величина этой прибыли? [Ответ: увеличение на 5 долл. (35 долл. в месяц) позволит получать максимальную прибыль в размере 612 500 долл.]
7. Магазин бытовой техники продает 810 телевизоров в год. Стоимость хранения телевизора составляет 12 долл. в год. При заказе партии новых телевизоров магазин несет фиксированные затраты в 60 долл. и дополнительные затраты в 10 долл. за каждый телевизор в партии. Сколько раз в год потребуется магазину делать заказ, чтобы минимизировать затраты создания и хранения запасов? Каков при этом оптимальный объем партии? [Ответ: 9 раз в год, объем партии 90 телевизоров.]
8. Дерево, посаженное в момент времени $t = 0$, имеет текущую стоимость в момент t (после посадки), определяемую соотношением $P(t) = 2t - 10$. Предположим, что ставка процента составляет 5% в год, дисконтирование непрерывное. Когда следует срубить дерево, чтобы максимизировать текущую дисконтированную стоимость? [Подсказка: текущая дисконтированная стоимость дерева равна $Q(t) = (2t - 10)e^{-0,05t}$.]

1.4. Использование метода Лагранжа при оптимизации

В двух предыдущих разделах обсуждались методы нахождения оптимума в случае, когда множество альтернатив — интервал (числовой прямой). Однако в некоторых ситуациях необходимо искать оптимум, когда множество альтернатив описывается набором уравнений. Далее будет рассмотрен случай, в котором множество альтернатив является подмножеством плоскости xy и описывается уравнением $g(x, y) = c$. То есть множество альтернатив задается в виде

$$\Omega = \{(x, y) \in R^2 : g(x, y) = c\}.$$

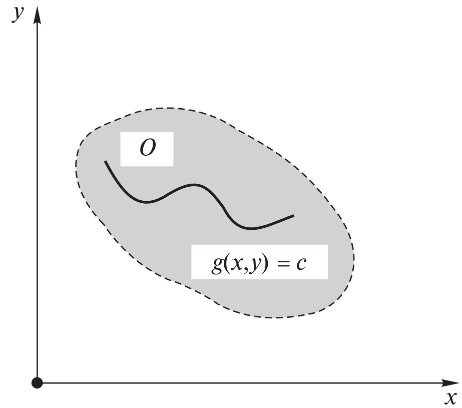

Рис. 1.5

Обычно предполагается, что *функция-ограничение* $g(x,y)$, так же как и целевая функция, имеет непрерывные частные производные на открытом множестве O, содержащем Ω. В данном случае наша оптимизационная задача формулируется так:

$$\boxed{\text{Максимум } u(x,y) \text{ при условии } g(x,y) = c.}$$

Геометрический смысл ограничения $g(x,y) = c$ показан на рис. 1.5.

Оптимизационная задача в этом случае имеет прозрачную физическую интерпретацию. Можно представить, что уравнение $g(x,y) = c$ задает форму проволоки, а $u(x,y)$ — температуру (или плотность массы) проволоки в точке (x,y). В таком случае решение нашей задачи даст расположение самой нагретой точки проволоки (точки с самой высокой плотностью массы).

Для решения подобного типа оптимизационных задач необходимо применить метод, известный как **метод Лагранжа**[1]. Метод использует частные производные. Напомним, что **частной производной** $\partial f/\partial x$ функции двух переменных $f(x,y)$ по переменной x называется производная $f(x,y)$ по x при фиксированном значении y. Аналогично, частной производной $\partial f/\partial y$ функции $f(x,y)$ по переменной y называется производная $f(x,y)$ по y при фиксированном значении x. Например, если $f(x,y) = x^2 + 2xy^3 + y^2$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y^3 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy^2 + 2y.$$

Таким же образом можно находить частные производные функции более чем двух переменных. При вычислении частной производной по переменной нужно помнить о том, что в процессе дифференцирования все остальные

[1] Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) — выдающийся французский математик. Известен благодаря его знаменитым уравнениям движения в механике.

переменные полагаются константами. Рассмотрим, например, функции $f(x,y,z) = x^2 + 2x\sqrt{y} + xz^2$ и $g(x,y,z,v) = xy + zv^2 - \cos v$.

Их частные производные равны

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{y}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2xz, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = v^2 \text{ и } \frac{\partial g}{\partial v} = 2zv + \sin v.$$

Использование метода Лагранжа состоит в следующем. С функциями u и g ассоциируем новую функцию L, известную как **функция Лагранжа**, или **лагранжиан**, и определенную формулой

$$L(x,y,\lambda) = u(x,y) + \lambda[c - g(x,y)].$$

При определении функции Лагранжа вводится новая переменная λ, называемая **множителем Лагранжа**.

По аналогии с тестом первого порядка на решении нашей оптимизационной задачи обращаются в нуль все частные производные функции Лагранжа, т.е.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.$$

Рекомендации по применению метода Лагранжа состоят в следующем.

Рекомендации по применению метода Лагранжа

Для нахождения решения задачи

«Максимум (или минимум) $u(x,y)$ при условии $g(x,y) = c$»

необходимо решить систему уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \text{ и } \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0,$$

или, в более явном виде, необходимо решить систему уравнений:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}, \quad g(x,y) = c$$

с тремя неизвестными: x, y и λ.

Тогда все точки максимума и минимума целевой функции $u(x,y)$ окажутся среди найденных наборов (x,y).

Заметим, что решение этой системы уравнений не обязательно дает непременно максимум или минимум. Для того чтобы понять, каким типом экстремума оказывается решение этой системы, требуется некоторая дополнительная информация относительно оптимизационной задачи.

Приведем несколько примеров для иллюстрации метода.

Пример 1.6. У компании есть две фабрики, производящие один и тот же товар. Фабрика A производит x единиц продукции с издержками в $2x^2 + 50\,000$ долл., а фабрика B может производить y единиц товара с издержками в $y^2 + 40\,000$ долл. *Если требуется выполнить заказ на производство*

1200 единиц товара, как следует распределить производство между двумя фабриками, чтобы совокупные издержки были минимальны? Какими будут эти издержки?

Для решения задачи сначала вычислим функцию издержек $C(x, y)$ производства x единиц товара на фабрике A и y единиц на фабрике B. Это будет сумма издержек производства на каждой фабрике, т.е.

$$C(x, y) = (2x^2 + 50\,000) + (y^2 + 40\,000) = 2x^2 + y^2 + 90\,000 .$$

Если требуется произвести в общей сложности 1200 единиц товара, то будем иметь ограничение $g(x, y) = x + y = 1200$. Таким образом, по методу Лагранжа, нам необходимо решить систему уравнений:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x},\ \frac{\partial C}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y},\ g(x, y) = 1200 .$$

Вычисляя соответствующие производные, получим

$$4x = \lambda , \tag{1.1}$$

$$2y = \lambda , \tag{1.2}$$

$$x + y = 1200 . \tag{1.3}$$

Из (1.1) и (1.2) находим, что $y = 2x$. Подставив это соотношение в (1.3), получим, что $x + 2x = 1200$, или $x = 400$, и $y = 1200 - 400 = 800$.

Таким образом, полные затраты на производство будут минимальны, если фабрика A будет производить 400 единиц товара, а фабрика B — 800 единиц. Общие затраты на производство составят

$$C(400,\ 800) = 2 \times 400^2 + 800^2 + 90\,000 = 1\,050\,000 \text{ долл.} \quad ■$$

Пример 1.7. Изготовление Q единиц продукции осуществляется по технологии

$$Q(K, L) = 60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} ,$$

где K — количество использованного капитала; L — количество часов труда. Цена капитала равна 20 долл. за единицу, а заработная плата составляет 15 долл. за час. *Какие значения K и L позволят произвести 4200 единиц продукта с минимальными издержками? Каковы эти минимальные издержки?*

Функция издержек $C(K,L)$ для K единиц капитала и L часов труда — это

$$C(K, L) = 20K + 15L .$$

Так что наша задача может быть сформулирована в терминах оптимизации следующим образом:

$$\text{минимум } C(K, L) = 20K + 15L$$

$$\text{при условии } Q(K, L) = 60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}} = 4200 .$$

Решим эту задачу, используя метод Лагранжа. Для начала вычислим производные $\frac{\partial Q}{\partial K}$ и $\frac{\partial Q}{\partial L}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{60}{2} K^{\frac{1}{2}-1} L^{\frac{1}{3}} = \frac{Q}{2K}, \ \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{60}{3} K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{3}-1} = \frac{Q}{3L}.$$

В соответствии с методом Лагранжа нужно решить систему уравнений:

$$\frac{\partial C}{\partial K} = \lambda \frac{\partial Q}{\partial K}, \ \frac{\partial C}{\partial L} = \lambda \frac{\partial Q}{\partial L}, \ 60 K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{3}} = 4200.$$

Подставляя производные, получаем систему

$$20 = \lambda \frac{Q}{2K}, \tag{1.4}$$

$$15 = \lambda \frac{Q}{3L}, \tag{1.5}$$

$$60 K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{3}} = 4200. \tag{1.6}$$

Разделив (1.4) на (1.5), получаем $\frac{20}{15} = \frac{3L}{2K}$, или $\frac{4}{3} = \frac{3L}{2K}$, откуда

$$L = \frac{8}{9} K. \tag{1.7}$$

Подстановка в (1.6) вместо L этого значения дает $60 K^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{9}} K^{\frac{1}{3}} = 4200$. Отсюда следует, что $K^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = \frac{4200 \cdot \sqrt[3]{9}}{120} = 72{,}8$. То есть $K^{\frac{5}{6}} = 72{,}8$ и, таким образом,

$$K = (72{,}8)^{\frac{6}{5}} = 171{,}62.$$

Теперь, используя (1.7), получаем $L = \frac{8 \times 171{,}62}{9} = 152{,}55$.

Другими словами, с помощью 171,62 единиц капитала и 152,55 часов труда будут произведены требуемые 4200 единиц продукции с минимальными издержками в размере $20 \times 171{,}62 + 15 \times 152{,}55 = 5721$ долл. ■

Следующий пример касается использования метода Лагранжа в центральной задаче теории потребителя. Основной задачей является нахождение набора товаров, доставляющего максимум функции полезности потребителя при его бюджетном ограничении.

Пример 1.8 (максимизация полезности). Бюджетное множество потребителя — это

$$\Omega = \{(x, y) \in R^2 : x \geq 0, \ y \geq 0, \ p_1 x + p_2 y \leq m\},$$

где p_1 и p_2 — (положительные) цены товаров, а m — доход потребителя.

Мы предлагаем воспользоваться методом Лагранжа, чтобы проиллюстрировать другой метод решения задачи, поставленной в примере 1.1. Итак, требуется решить следующую задачу оптимизации:

$$\text{максимум } u(x,y) = xy \text{ при условии } x \geq 0\,,\ y \geq 0 \text{ и } x + 2y \leq 12\,.$$

Нетрудно убедиться в том, что искомый набор лежит на «бюджетной линии» $x + 2y = 12$. Следовательно, мы решаем оптимизационную задачу:

$$\text{максимум } u(x,y) = xy \text{ при условии } x \geq 0\,,\ y \geq 0 \text{ и } x + 2y = 12\,.$$

Согласно методу Лагранжа требуется решить систему уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda \frac{\partial(x+2y)}{\partial x}\,,\ \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda \frac{\partial(x+2y)}{\partial y}\,,\ x + 2y = 12\,,$$

или

$$y = \lambda\,, \tag{1.8}$$

$$x = 2\lambda\,, \tag{1.9}$$

$$x + 2y = 12\,. \tag{1.10}$$

Подстановка выражений для x и y из (1.8) и (1.9) в (1.10) дает $2\lambda + 2\lambda = 12$, откуда $\lambda = 3$, $x = 6$ и $y = 3$. Таким образом, (6,3) — искомая точка максимума. ■

Упражнения

1. Решите задачу 3 из раздела 1.2. [Ответ: букет из 8 гвоздик и 4 роз приносит максимальное удовлетворение.]

2. Производитель выделил 10 000 долл. на разработку и продвижение нового продукта. По своему опыту он знает, что если x тыс. долл. пойдут на разработку и y — на рекламу, то зарплаты будут примерно равны $Q(x,y) = 100x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ единицам. Сколько тысяч долларов нужно потратить на разработку и сколько на рекламу, чтобы в дальнейшем иметь максимально высокие зарплаты? Чему равна максимально возможная зарплата? [Ответ: $x = 7{,}5$; $y = 2{,}5$; максимальная зарплата 3248.]

3. Найдите максимум функции полезности $u(x,y) = x^3y^2$ на бюджетном множестве

$$\Omega = \{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 3x + 5y \leq 15\}\,.$$

4. У компании есть три фабрики, A, B и C, производящие один и тот же товар. Фабрика A производит x единиц продукции с издержками в $400 + \frac{1}{50}x^2$ долл., фабрика B может производить y единиц товара с издержками в $200 + y + \frac{1}{300}y^3$ долл. Фабрика C может производить z единиц товара с издержками в $300 + 10z$ долл. Если требуется выполнить заказ на производство 500 единиц товара, как следует распределить производство между тремя фабриками, чтобы совокупные издержки были минимальны? Какими будут эти издержки?

5. Вы заходите в супермаркет, чтобы купить три продовольственных товара. У вас в кармане 108 долл., и вы хотите их все потратить. Первый товар стоит 1 долл. за фунт, второй — 3 долл. за фунт, третий — 4 долл. за фунт. Если ваше удовлетворение от набора (x,y,z) представляется функцией полезности $u(x,y,z)=x\times y\times z$, какой набор дает вам наибольшее удовлетворение?
6. Имеется 80 ярдов забора, с помощью которого требуется оградить прямоугольный участок. Каковы размеры (т.е. длина и ширина) огражденного участка с наибольшей возможно площадью? Чему равна площадь такого участка? [Ответ: длина = ширина = 20 ярдов.]
7. Цилиндрическая банка содержит 4π кубических дюймов яблочного сока. Стоимость монтирования одного квадратного дюйма металлической крышки и дна в 2 раза превосходит стоимость монтирования одного квадратного дюйма боковой поверхности. Каковы размеры наименее дорогой банки? [Ответ: радиус = 1 дюйм, высота = 4 дюйма.]
8. Найдите кратчайшее расстояние от точки (0, 1) оси ординат до параболы $x^2-4y=0$.

1.5. Неопределенность и случайность

В разделе рассмотрены математические основы, необходимые для моделирования принятия решений при неопределенности. В нем в сжатом виде представлены теория вероятностей и случайные величины. На этом материале основывается значительная часть материала других глав.

1.5.1. Теория вероятностей

Кто-то однажды сказал, что в этом мире неизбежны только смерть и налоги. Все остальное подвластно случаю. Для того чтобы понять феномен случайности (в рамках систематического подхода), математиками была разработана *теория вероятностей*[1], которая основывается на концепции вероятностного пространства.

Под **вероятностным пространством** мы будем понимать пару (S,P), где S — конечное множество, называемое **пространством элементарных событий**[2], а P — функция, которая каждому подмножеству $A\subset S$ ставит в соответствие вещественное число $P(A)\in[0;1]$. Если мы в качестве S рассмотрим

[1] Восхитительный рассказ об этом можно найти в книге Питера Бернштейна «Против Богов» (*Bernstein P.* Against the Gods. N.Y.: John Wiley & Sons, 1996).

[2] Альтернативные названия S — выборочное пространство, пространство выборок. — *Примеч. пер.*

$\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ и положим $p_i = P(\{s_i\})$ (вероятность события s_i), то функция P должна удовлетворять следующим условиям:

(1) $p_i \geq 0$ для всех I и $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$;

(2) если A является подмножеством S, то $P(A) = \sum_{s_i \in A} p_i$.

В частности, мы имеем

$$P(\varnothing) = 0 \text{ и } P(S) = 1^{1}.$$

Вместо того чтобы говорить, что (S, P) — вероятностное пространство, довольно часто говорят, что P — вероятностное распределение на множестве исходов S.

Вот простой пример, показывающий, как можно использовать вероятностное пространство для моделирования неопределенности. Рассмотрим двухпериодную модель с периодами 0 и 1 (или «сегодня» и «завтра»), в которой все известно о сегодняшнем дне, но присутствует неопределенность относительно завтрашних исходов. То, что может случиться завтра, описывается множеством S возможных исходов. Вероятностное распределение P на S характеризует (чаще всего субъективные) шансы каждого из возможных исходов. Например, рассмотрим турнир NCCA (Национальной ассоциации студенческого спорта) по баскетболу среди мужских команд, который проводится ежегодно в марте. В турнире участвуют 64 лучшие команды колледжей, и, следуя определенной процедуре выбывания, определяется наилучшая мужская баскетбольная команда года Национальной ассоциации студенческого спорта. Таким образом, «сегодня», т.е. перед началом турнира, пространство элементарных событий имеет вид $S = \{1, 2, \ldots, 64\}$, а неопределенность заключается в том, какая из команд окажется победителем «завтра», т.е. к концу турнира. При спецификации распределения вероятностей на S определяем шансы каждой из команд выиграть турнир.

Подмножества пространства элементарных событий S называют **событиями**. Если A — событие, то $P(A)$ — вероятность этого события, т.е. шанс его наступления. Пространство элементарных событий S может быть и бесконечным. Однако в таком случае функция вероятности P является особой функцией на подмножествах S (называемой *вероятностной мерой*), определенной на особом наборе подмножеств S (событий), который обычно включает не каждое подмножество S.

События можно рассматривать как представляющие случайные исходы вероятностных экспериментов. Например, при подбрасывании монеты могут быть два исхода: «орел» (H) или «решка» (T)[2]. В данном примере пространство элементарных событий — это множество $S = \{H, T\}$. Если монета **правильная**

[1] Символ $\varnothing$ обозначает **пустое множество**, множество без элементов.

[2] H от английского Heads, T от английского Tails, в соответствии с названиями изображений на монетах. — *Примеч. пер.*

(или **симметричная**), мы полагаем, что $P(H) = P(T) = \frac{1}{2}$. Если же мы полагаем, что монета неправильная, мы можем приписать другие вероятности событиям H и T; например, положить, что $P(H) = \frac{1}{3}$, а $P(T) = \frac{2}{3}$.

В вероятностном эксперименте с подбрасыванием кости (игрального кубика) вероятностное пространство — это множество $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, где каждое число i представляет событие: *после подбрасывания кости число i оказывается на верхней грани кубика*. Если мы предполагаем, что кубик «правильный», то мы приписываем вероятности $p_i = \frac{1}{6}$ любому i.

1.5.2. Случайные величины

Удобный способ описания исходов случайных событий — использование понятия случайной величины. Мы начали с обсуждения вероятностного пространства (S, P), чтобы далее рассмотреть эту концепцию.

Случайной величиной называется функция $X : S \to R$ (из вероятностного пространства во множество вещественных чисел). Со случайной величиной X мы ассоциируем некоторые подмножества (события) выборочного пространства. Если A — подмножество R (множества вещественных чисел), то под записью $X \in A$ мы подразумеваем событие выборочного пространства $\{s \in S : X(s) \in A\}$. То есть мы будем использовать крайне удобные статистические обозначения

$$X \in A = \{s \in S : X(s) \in A\} \in A.$$

Например, если x — произвольное вещественное число, то

$$X \le x = \{s \in S : X(s) \le x\}.$$

Кроме того, $a \le X < b = \{s \in S : a \le X(s) < b\}$.

С каждой случайной величиной связана некоторая функция, называемая *функцией распределения*. Функция распределения указывает вероятности, с которыми случайная величина принимает различные значения, и определяется следующим образом.

Определение 1.9 (распределение случайной величины). *Пусть $X : S \to R$ — случайная величина. Тогда функцией распределения X называется функция $F : R \to R$, определенная для (каждого) вещественного числа x соотношением*

$$F(x) = P(X \le x).$$

Проиллюстрируем понятие функции распределения случайной величины на двух примерах.

Пример 1.10. Рассмотрим случайный эксперимент с подбрасыванием монеты. Ранее мы упоминали, что вероятностным пространством здесь является множество $S=\{H,T\}$ и (предполагая, что монета идельно ровная) вероятности событий $P(H)=P(T)=\frac{1}{2}$.

Рассмотрим случайную величину $X:S\to R$, определенную следующим образом:

$$X(H)=1,\ X(T)=2.$$

Легко видеть, что

$$X\le x=\begin{cases}\varnothing, & \text{если } x<1,\\ \{H\}, & \text{если } 1\le x<2,\\ \{H,T\}, & \text{если } x\ge 2.\end{cases}$$

Это приводит к следующей функции распределения:

$$F(x)=P(X\le x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<1,\\ \frac{1}{2}, & \text{если } 1\le x<2,\\ 1, & \text{если } x\ge 2.\end{cases}$$

График этой функции представлен на рис. 1.6, *а*. ■

Пример 1.11. Теперь рассмотрим эксперимент с бросанием кости. Выборочное пространство — это $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ и $p_i=\frac{1}{6}$ для каждого *i*. Определим случайную величину $X:S\to R$ как $X(i)=i$. Тогда функция распределения *F* случайной величины *X* будет следующей: $F(x)=\frac{k_x}{6}$, где k_x — число целых чисел из множества 1, 2, 3, 4, 5, 6, меньших или равных *x*. График *F*(*x*) изображен на рис. 1.6, *б*. ■

Форма графиков функций распределения на рис. 1.6 отражает фундаментальные свойства всех функций распределения. Они описаны в следующей теореме.

Теорема 1.12 (свойства распределений). Пусть $F:R\to R$ — *функция распределения случайной величины X. Тогда*

(1) $0\le F(x)\le 1$ *для любого x*;

(2) *F — неубывающая функция, т.е.* $F(x)\le F(y)$ *при* $x<y$;

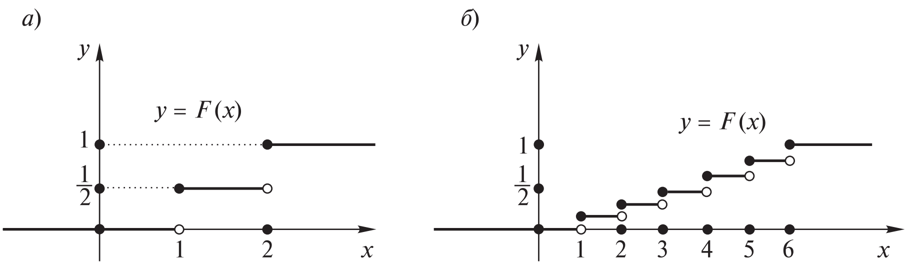

Рис. 1.6

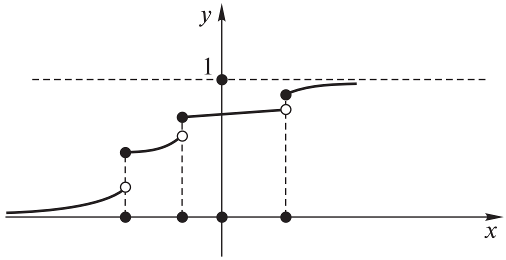

Рис. 1.7. График типичной функции распределения

(3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *и* $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$;

(4) $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$ *при* $a < b$;

(5) $P(X = a) =$ *скачок функции распределения* $F(x)$ *в точке* $x = a$.

Пример типичной функции распределения показан на рис. 1.7.

1.5.3. Ожидаемое значение случайной величины

Со случайными величинами связаны следующие три их характеристики: *математическое ожидание*, *дисперсия* и *стандартное отклонение.* Они определяются следующим образом.

Определение 1.13. *Пусть* $X : S \to R$ *— случайная величина.*

1. ***Математическое ожидание*** или ***ожидаемое значение*** $E(X)$ *случайной величины X — это*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i X(s_i) .$$

2. ***Дисперсия*** $Var(X)$ *случайной величины X — это*

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \, [X(s_i) - E(X)]^2 .$$

3. ***Стандартным отклонением*** σ *случайной величины X является положительный квадратный корень из дисперсии X, т.е.*

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} .$$

Ожидание (или ожидаемое значение) измеряет среднее значение случайной величины (или среднее значение). Дисперсия и стандартное отклонение служат мерой «рассеяния» или «разброса» значений случайной величины относительно ожидаемого значения. Как мы увидим далее, данные параметры представляют собой очень полезные обобщенные характеристики распределения случайной величины.

Проиллюстрируем данные понятия на случайных величинах из примеров 1.10 и 1.11.

Что касается примера 1.10, имеем следующие значения:

$$E(X)=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times 2=\frac{3}{2},$$

$$Var(X)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(2-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

В примере 1.11 получаем

$$E(X)=\frac{1}{6}\times 1+\frac{1}{6}\times 2+\frac{1}{6}\times 3+\frac{1}{6}\times 4+\frac{1}{6}\times 5+\frac{1}{6}\times 6=\frac{21}{6}=\frac{7}{2},$$

$$Var(X)=16\sum_{i=1}^{6}\left(i-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}=\sqrt{\frac{35}{12}}=1,708.$$

Во многих ситуациях случайности и неопределенности функция распределения случайной величины достаточно хорошо предоставляет информацию, касающуюся рассматриваемого случайного эксперимента. По этой причине выборочные пространства (и даже случайные величины) во многих приложениях отодвигаются на второй план, и вместо них рассматриваются функции распределения случайных величин. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1.14. Рассмотрим акцию, доходности которой и их вероятности описываются в табл. 1.1. Можно трактовать доходность акции как случайную величину R, которая принимает значения 0%, 5%, 8% и 10% с указанными вероятностями. В данном примере не указано пространство элементарных событий, на котором определена случайная величина R, хотя события, которые приводят к искомым доходностям, являются элементами этого пространства. Так обычно и поступают во многих приложениях, где подходящая информация о том, что может произойти, исчерпывающим образом описывается распределением случайной величины. В таком случае существует много способов определить пространство элементарных событий. Например, положим, что $S=\{a,b,c,d\}$, и определим профиль вероятностей на S в виде $P(a)=0{,}3$, $P(b)=0{,}2$, $P(c)=0{,}4$ и $P(d)=0{,}1$. Теперь можно рассмотреть случайную величину $R:S\to R$, определенную как $R(a)=0$, $R(b)=5$, $R(c)=8$ и $R(d)=10$. Как

Таблица 1.1

	Доходность акции	
Вероятности	0,3	0%
	0,2	5%
	0,4	8%
	0,1	10%

видно, не требуется специфицировать пространство элементарных событий, и для нас здесь важно только распределение. (Попробуйте построить другие пространства элементарных событий для этого примера.)

Заметим, что ожидание случайной величины R равно

$$E(R) = 0\% \times 0,3 + 5\% \times 0,2 + 8\% \times 0,4 + \\ + 10\% \times 0,1 = 1\% + 3,2\% + 1\% = 5,2\%.$$

Ее дисперсия имеет вид

$$Var(R) = [0 - 5,2]^2 \times 0,3 + [5 - 5,2]^2 \times 0,2 + \\ + [8 - 5,2]^2 \times 0,4 + [10 - 5,2]^2 \times 0,1 = 13,56,$$

а стандартное отклонение

$$\sigma(R) = \sqrt{Var(R)} = \sqrt{13,56} = 3,6824\,.$$

Ожидаемое значение в 5,2% представляет среднюю доходность акции, а стандартное отклонение 3,6824% показывает рассеяние фактически реализованных доходностей вокруг среднего значения 5,2%. Стандартное отклонение часто используется в качестве меры волатильности, или «риска», доходности. ■

Некоторые виды распределений являются универсальными и часто возникают во многих задачах. В разнообразных приложениях распределения являются также непрерывными функциями и могут быть выражены в терминах плотности распределения следующим образом.

Определение 1.15. *Говорят, что функция распределения F случайной величины X имеет* ***функцию плотности****, если существует неотрицательная функция $f : R \to R$ (называемая* ***функцией плотности*** *или просто* ***плотностью****), такая что для всех $x \in R$ выполнено*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,.$$

Кроме того что функция плотности всегда положительна, она также удовлетворяет соотношению $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. Функция плотности позволяет находить вероятности случайной величины X в терминах интегралов. Для любых вещественных a и b ($a < b$) выполняется соотношение

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(t)dt\,.$$

Заметим также, что

$$P(X > a) = \int_{a}^{\infty} f(t)dt\,.$$

В терминах функции плотности ожидаемое значение (математическое ожидание) и дисперсия случайной величины могут быть вычислены по формулам

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [t - E(X)]^2 f(t)dt .$$

1.5.4. Равномерное и нормальное распределение

Заканчивая раздел, приведем два важных примера функций распределения, которые часто встречаются на практике. Первое из них — равномерное распределение.

Пример 1.16 (равномерное распределение). Говорят, что случайная величина X имеет **равномерное распределение** на конечном замкнутом интервале $[a,b]$, если функция плотности X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } a < x < b, \\ 0, & \text{если } x \ge b. \end{cases}$$

Функция распределения выглядит следующим образом:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } a < x < b, \\ 1, & \text{если } x \ge b. \end{cases}$$

Графики функции плотности и функции распределения равномерной случайной величины представлены на рис. 1.8.

Вычислим математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение равномерно распределенной случайной величины X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b tdt = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} ,$$

$$Var(X) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 dt = \frac{(b-a)^2}{12} ,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{(b-a)\sqrt{3}}{6} .$$

Мы будем использовать равномерно распределенные случайные величины в дальнейшем изложении. ■

Приведем пример с использованием равномерного распределения.

Пример 1.17. Некий индивид обнаружил, что случайная величина X — время, которое он тратит на дорогу до офиса, равномерно распределена на

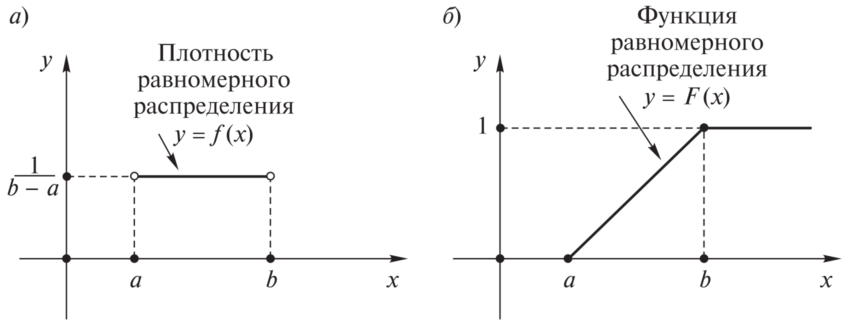

Рис. 1.8

интервале от одного часа до одного часа и 15 минут. Ему необходимо прийти на работу к 8 часам утра. Используя свойства равномерного распределения, мы можем ответить на следующие вопросы.

(1) Когда ему нужно выйти из дома, для того чтобы прийти на работу к 8:00 (i) с вероятностью 1 и (ii) с вероятностью 0,9?

(2) Когда он рассчитывает прийти на работу, если выйдет из дома в 7:00?

(3) Каково стандартное отклонение времени прибытия при выходе из дома в 7:00?

В этом примере время прихода равномерно распределено на замкнутом интервале $[d+1, d+1{,}25]$ часов, где d — время выхода из дома. Таким образом, если индивид выйдет из дома в 6:45, то время его прихода на работу будет расположено в интервале $[7{:}45, 8{:}00]$ с вероятностью 1. Если ему необходимо прийти на работу к 8:00 с вероятностью 0,9, а X — случайная величина времени его прихода, то время отправления должно удовлетворять соотношению

$$P(d+1 \le X \le 8) = 0{,}9\,.$$

Поскольку плотность распределения времени прибытия имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{0{,}25} = 4, & \text{если } d+1 \le x \le d+1{,}25, \\ 0, & \text{если } x < d+1 \text{ или } x > d+1{,}25, \end{cases}$$

то из соотношения $P(d+1 \le X \le 8) = 0{,}9$ следует, что

$$[8-(d+1)] \times 4 = 0{,}9\,.$$

Следовательно, $d = \dfrac{27{,}1}{4} = 6{,}7777$. Это значит, что этот индивид должен отправиться на работу через 48 секунд после 6:46, если хочет прийти на работу в 8:00 с вероятностью 0,9.

Если он отправится на работу в 7:00, то он придет на работу между 8:00 и 8:15. Ожидаемое время прихода составит 30 секунд после 8:07. Стандартное отклонение времени прихода

$$\frac{0,25\sqrt{3}}{6} = 0,0722 \text{ часа},$$

или 4,33 минуты. ■

Теперь перейдем к нормальному распределению.

Пример 1.18 (нормальное распределение). Говорят, что случайная величина X имеет **нормальное распределение** с параметрами m и σ^2, если ее функция плотности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

То есть функция распределения нормально распределенной случайной величины X с параметрами m и σ^2 задается формулой

$$\Phi_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

(В статистике общепринято использовать прописную греческую букву Ф для обозначения нормального распределения.)

График функции плотности $f(x)$ представляет собой кривую в форме колокола, симметричную относительно прямой $x = m$. Графики функций $f(x)$ и $\Phi_X(x)$ изображены на рис. 1.9.

Оказывается, что математическое ожидание и дисперсия нормально распределенной случайной величины X имеют простой вид

$$E(X) = m \text{ и } Var(X) = \sigma^2.$$

В случае $m = 0$, $\sigma = 1$ мы имеем дело со *стандартным нормальным распределением* (*стандартным нормальным законом*). Функция распределения Ф для стандартного нормального распределения имеет вид

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Значения функции Ф можно найти в табл. 1.2. Для отрицательных значений x значение Ф находится из соотношения

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x).$$

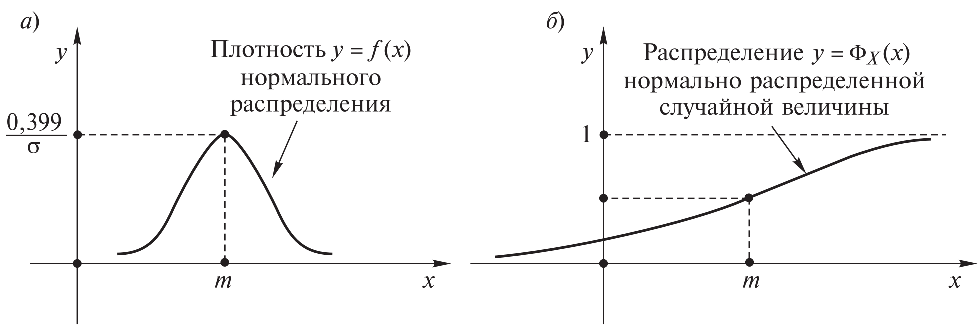

Рис. 1.9

Таблица 1.2. Значения функции Φ(*x*)

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7919	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7398	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9485	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9929	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

В общем случае, если X — нормально распределенная случайная величина с параметрами m и σ^2, то ее распределение может быть выражено через распределение стандартной нормальной случайной величины по формуле

$$\Phi_X(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

По этой формуле и на основе табл. 1.2 значений $\Phi(x)$ можно вычислять значения любого нормального распределения.

Приведем пример с использованием нормального распределения.

Пример 1.19. Вернемся к примеру 1.17, в котором рассматривалось, сколько времени требуется некоему индивиду на дорогу до работы. Но теперь предположим, что время прихода имеет нормальное распределение со средним $m = 1$ час и стандартным отклонением $\sigma = 8$ минут, или 0,1333 часа.

(i) Если он выйдет на работу в 7:00, то какова вероятность быть на рабочем месте в 8:00?

(ii) Чему равна вероятность прихода на работу к 8:00, если он выходит в 6:45?

Вероятность прихода на работу до 8:00 в случае выхода в 7:00 равна вероятности нахождения в пути не более часа. А это может быть вычислено следующим образом:

$$P(X \le 1) = P(X \le \text{Mean}) = 0,5\,[1].$$

Вероятность дойти до работы к 8:00 при условии, что выход состоялся в 6:45, составляет

$$P(X \le 1,25) = \Phi_X(1,25) = \Phi\left(\frac{1,25-1,0}{0,1333}\right) = \Phi(1,8755) = 0,9696\,.$$

Последнее значение вероятности получено таким образом: по табл. 1.2 вероятность для стандартной случайной величины быть меньшей или равной 1,87 составляет 0,9693, а быть меньшей или равной 1,88 — 0,9699. Мы взяли среднее двух величин и получили вероятность 0,9696. ■

Упражнения

1. Изобразите функцию распределения случайной величины из примера 1.10 с вероятностями $P(H) = \frac{1}{3}$ и $P(T) = \frac{2}{3}$. Вычислите ее математическое ожидание, дисперсию и стандартное отклонение. [Ответ: $E(X) = \frac{5}{3}$; $Var(X) = \frac{2}{9}$.]
2. Доходность акций может рассматриваться как случайная величина. Изобразите распределение случайной величины X «доходность акции», приносящей доход в 3% с вероятностью 1/3, 6% с вероятностью 1/3 и 10% с вероятностью 1/3. Что является выборочным пространством случайной величины X?
3. Транспортная компания южного направления каждые 30 минут с некоторой станции отправляет на юг автобус. Некая женщина приходит на станцию в случайный момент времени. Пусть X — случайная величина, представляющая время (в минутах) ожидания ею следующего автобуса. Будем полагать, что утверждение «она приходит на станцию в случайный момент времени» означает, что X имеет равномерное распределение на интервале [0,30]. Нарисуйте график распределения и вычислите вероятность того, что ей придется ждать автобуса не более 21 минуты. [Ответ: 70%.]

[1] Mean — среднее значение или ожидаемое значение. — *Примеч. пер.*

4. Пусть X — случайная величина, представляющая количество ошибок на одной странице книги. Если X равномерно распределена на отрезке [0;1,1], какова вероятность, что найдется хотя бы одна типографская ошибка на этой странице? [Ответ: 9,1%.]

5. Годовое количество осадков (в дюймах) на конкретной территории является случайной величиной X. Предположим, что X имеет нормальное распределение с параметрами $m = 30$ и $\sigma = 5$. Какова вероятность, что в данном году на данной территории выпадет более 35 дюймов осадков? [Ответ: 15,87%.]

6. Пусть X — случайная величина, измеряющая количество миль, которые способен проехать автомобиль до момента выхода из строя его аккумулятора. Будем считать, что распределение X задается формулой

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0,0001x}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Водитель собирается проехать 5000 миль: с какой вероятностью это путешествие обойдется без замены аккумулятора? [Ответ: $e^{-0,5} \approx 60,65$.]

7. Время работы (в годах) некоей электронной трубки можно описать случайной величиной X с функцией плотности

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Чему равно ожидаемое время работы такой трубки? [Ответ: 2 года.]

8. В рекламе некоего бренда хлопьев «Мюсли» утверждается, что среднее количество изюма в каждой коробке составляет 80 штук со стандартным отклонением в 6 штук. Если изюм окажется нормально распределенным, с какой вероятностью в произвольной коробке будет: а) меньше чем 70 штук; б) больше чем 90 штук?
Как изменится ответ в случае равномерного распределения?

9. Предположим, что единожды подбрасываются две игральные кости. Исход такого эксперимента выражается парой чисел (x,y), представляющих собой числа на верхних гранях этих костей. Чему равно ожидаемое значение абсолютной разницы этих чисел? [Ответ: $\frac{35}{18}$.]

10. Предположим, что Φ — стандартное нормальное распределение, т.е. что

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

(a) Покажите, что для любого вещественного x верно, что $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.

(b) Докажите, что если X имеет нормальное распределение с параметрами m и σ^2, то для любого вещественного числа x выполнено соотношение

$$\Phi_X(x) = \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right).$$

1.6. Принятие решений в условиях неопределенности

Цель раздела — ввести понятие *ожидаемой полезности* и убедить читателя в том, что это понятие — очень важный (и полезный) инструмент анализа принятия решений при неопределенности.

1.6.1. Концепция ожидаемой полезности

Во многих ситуациях результат решения зависит от случая. При покупке акций или облигаций индивид обычно не знает в точности будущей стоимости своих инвестиций. Когда фермер принимает решение о выращивании той или иной сельскохозяйственной культуры, он не знает, какой будет ее цена на момент сбора урожая. Подобным же образом, покупая лотерейный билет, индивид совсем не уверен в том, что выиграет. Тем не менее принимать решения в условиях неопределенности необходимо, и вопрос состоит в том, существует ли систематический и непротиворечивый метод, позволяющий принимать решения в таких неопределенных условиях. В разделе будут изучены основные положения теории принятия решений при неопределенности, известной как *теория ожидаемой полезности*.

Каждое решение в условиях неопределенности можно рассматривать как решение о выборе лотереи. **Лотерея** L — это не что иное, как вероятностное пространство (S,P), т.е. $L = (S,P)$. Другими словами, лотерея состоит из множества альтернатив (или исходов) $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$, характеризующих неопределенность (т.е. возможные «завтрашние» состояния мира) вместе с распределением вероятностей P на S, где $p_i = P(\{s_i\})$ представляет собой вероятность того, что завтра реализуется состояние s_i. Часто с исходом s_i связывают богатство w_i и интерпретируют p_i как вероятность получения богатства w_i при принятии решения или розыгрыша лотереи. Таким образом, мы можем представлять лотерею L как набор пар $L = \{(w_i, p_i) : i = 1, \ldots, n\}$, когда лотерея имеет n возможных альтернативных исходов $1, 2, \ldots, n$, и каждый исход i реализуется с вероятностью p_i. **Ожидаемое богатство** от лотереи L определяется вещественным числом

$$E(L) = \sum_{i=1}^{n} p_i w_i \; .$$

Приведем пример, предвосхищающий дальнейшую дискуссию.

Пример 1.20. Для простоты предположим, что индивиду требуется решить, куда вложить 100 долл. Альтернативы следующие:

(1) купить облигацию, которая принесет доход в 6% (6 долл.);

(2) инвестировать в акцию, которая принесет доход в 3% с вероятностью 1/3, 6% с вероятностью 1/3 и 10% с вероятностью 1/3.

В наших терминах, индивиду необходимо выбрать из двух лотерей:

$$L_1 = \{(6,1)\} \text{ и } L_2 = \left\{\left(3, \frac{1}{3}\right), \left(6, \frac{1}{3}\right), \left(10, \frac{1}{3}\right)\right\}.$$

Понятно, что вложение в акцию связано с риском, поскольку имеется шанс, что ее доходность окажется равной 3%. Но с другой стороны, есть хороший шанс получить высокий доход в 10%. Какой выбор сделает индивид в данной ситуации? Очевидно, ответ будет зависеть от склонности индивида к риску. Если он готов на некоторый риск, то будет оценивать ожидаемый доход от обоих вложений

$$E(L_1) = 1 \times 6 = \$6\,,$$

$$E(L_2) = \frac{1}{3} \times 3 + \frac{1}{3} \times 6 + \frac{1}{3} \times 10 = \$6{,}33\,.$$

Таким образом, ожидаемый доход по акции оказывается выше, чем ожидаемый доход по облигации. Как уже отмечалось, решение о том, какая из двух лотерей лучше, полностью зависит от склонности индивида к риску и от его выбора. Эта тема и будет предметом нашего обсуждения. ■

При принятии решений в условиях неопределенности различные (возможные) исходы могут привести, вообще говоря, к различным уровням богатства. Богатство чаще всего может быть преобразовано в потребление и, следовательно, в полезность. Таким образом, мы можем говорить о полезности, порожденной богатством w, и записывать это как $u(w)$. На более абстрактном и формальном языке математики мы бы сказали, что если решение, т.е. выбор лотереи, скажем, $L = \{(w_1, p_1), (w_2, p_2), (w_3, p_3)\}$, приводит к одному из альтернативных уровней богатства w_1, w_2, w_3, то это же решение имеет результатом один из трех альтернативных уровней полезности $u(w_1)$, $u(w_2)$, $u(w_3)$. Пусть известно, что эти исходы реализуются с вероятностями p_1, p_2, p_3. Тогда *ожидаемая полезность лотереи* L равна

$$Eu(L) = p_1 u(w_1) + p_2 u(w_2) + p_3 u(w_3)\,.$$

Функция $u(w)$ называется *функцией полезности на богатстве* или *функцией полезности Неймана — Моргенштерна*[1]. Она является «внутренней» для индивида и характеризует его предпочтения среди различных уровней богатства.

В дальнейшем мы будем игнорировать отрицательные значения богатства, поскольку законы о банкротстве не позволяют индивидам иметь отрицательный уровень богатства[2].

---

[1] Альтернативное, и как представляется, более распространенное название для функции полезности на исходах (или соответствующих этим исходам богатствах) — элементарная функция полезности или функция полезности Бернулли (по имени исследователя, который впервые, при объяснении так называемого Петербургского парадокса, ввел и использовал частный случай такой функции $u(w) = \ln w$). Функция полезности Неймана — Моргенштерна в этом случае — альтернативное название функции ожидаемой полезности — аддитивная по вероятностям оценка лотереи или, другими словами, аддитивная по вероятности функция полезности, представляющая предпочтения на лотереях. — *Примеч. ред.*

[2] В некоторых случаях полезность на богатстве $w = 0$ полагают равной $-\infty$, т.е., $u(0) = -\infty$. В принципе можно было бы определить функцию полезности на $(-\infty, \infty)$, однако это приводит к некоторым неудобствам при интерпретации функции полезности. Заметим, что при этом функция полезности может принимать отрицательные значения.

Определение 1.21. ***Функция полезности Неймана — Моргенштерна*** (*или* ***функция полезности на богатстве***) *— это строго возрастающая функция* $u:[0,\infty)\to[0,\infty)$, *удовлетворяющая* $u(0)=0$.

Теперь мы готовы определить величину ожидаемой полезности лотереи.

Определение 1.22. *Если u — функция полезности индивида на богатстве, то его* ***ожидаемая полезность*** *от лотереи* $L=\{(w_i,p_i):i=1,\ldots,n\}$ *— это вещественное число, равное*

$$Eu(L)=\sum_{i=1}^{n}p_i u(w_i)\ .$$

Нашей следующей задачей является демонстрация того, что понятие ожидаемой полезности представляет собой центральную идею теории принятия решения при неопределенности. Как уже говорилось, любое решение при неопределенности можно рассматривать как выбор подходящей лотереи. Это значит, что если обозначить через £ множество всех лотерей, то индивид должен иметь предпочтение на этом множестве £ (задаваемое отношением предпочтения $\succcurlyeq$), где запись $L_1 \succcurlyeq L_2$ означает, что «лотерея L_1 как минимум настолько же хороша (для данного индивида), как и лотерея L_2». Конечно, в соответствии с отношением предпочтения $\succcurlyeq$, индивид, поставленный перед выбором из двух лотерей, L_1 и L_2, либо предпочтет лотерею L_1 лотерее L_2, либо предпочтет лотерею L_2 лотерее L_1, либо не будет делать различий между ними, т.е. $L_1 \succcurlyeq L_2$ или $L_2 \succcurlyeq L_1$ или и то и другое одновременно. Возникает следующий вопрос.

- *Каким свойствам «рациональности» должно удовлетворять типичное отношение предпочтения* $\succcurlyeq$ *на множестве лотерей* £?

Три очевидных стандартных условия «рациональности» любого отношения предпочтения $\succcurlyeq$ на множестве £ следующие.

1. **Полнота**, т.е. для любых двух лотерей L_1 и L_2 верно, что либо $L_1 \succcurlyeq L_2$, либо $L_2 \succcurlyeq L_1$, либо и то и другое одновременно (случай безразличия).
2. **Рефлексивность**, т.е. $L \succcurlyeq L$ для любой лотереи L.
3. **Транзитивность**, т.е. если выполняются соотношения $L_1 \succcurlyeq L_2$ и $L_2 \succcurlyeq L_3$, то должно выполняться соотношение $L_1 \succcurlyeq L_3$.

Ясно, что любая (определенная на множестве лотерей £) функция полезности U, $U:£\to R$, представляет следующее отношение предпочтения $\succcurlyeq$ на £: $L_1 \succcurlyeq L_2$ когда $U(L_1)\geq U(L_2)$), которое должно удовлетворять трем вышеперечисленным свойствам. В частности, ожидаемая функция полезности $Eu:£\to R$ индивида с элементарной функцией *u* на богатстве, определенная для каждой лотереи $L=\{(w_1,p_1),(w_2,p_2),\ldots,(w_n,p_n)\}$ правилом

$$Eu(L)=\sum_{i=1}^{n}p_i u(w_i)\ , \qquad (*)$$

порождает такое предпочтение.

Напомним теперь, что функция полезности U : $£\to R$ **представляет** собой отношение предпочтения $\succcurlyeq$ на £, если $L_1 \succcurlyeq L_2$ имеет место тогда и только тогда, когда $U(L_1)\geq U(L_2)$. Рассмотрим следующий вопрос.

- *Каким дополнительным условиям «рациональности» должно удовлетворять отношение предпочтения, для того чтобы гарантировать существование представляющей его функции ожидаемой полезности вида* (*)?

Для существования представляющей данное отношение предпочтения ожидаемой функции полезности необходимо выполнение двух дополнительных условий.

(1) **Независимость:** если $L_1 \succcurlyeq L_2$ и $0 < p < 1$, то для любой лотереи L_3 лотерея $pL_1 + (1-p)L_3$ не хуже, чем лотерея $pL_2 + (1-p)L_3$, или

$$pL_1 + (1-p)L_3 \succcurlyeq pL_2 + (1-p)L_3 \text{ [1]}.$$

(2) **Непрерывность:** для любых трех лотерей L_1, L_2 и L_3 множества

$$\{\alpha \in [0,1] : \alpha L_1 + (1-\alpha)L_2 \succcurlyeq L_3\},$$

$$\{\beta \in [0,1] : L_3 \succcurlyeq \beta L_1 + (1-\beta)L_2\}$$

— замкнутые подмножества интервала [0,1].

Следующий пример иллюстрирует аксиому независимости.

Пример 1.21. Рассмотрим лотереи

$$L_1 = \{(6,1)\},\ \ L_2 = \left\{\left(3, \frac{1}{3}\right), \left(6, \frac{1}{3}\right), \left(10, \frac{1}{3}\right)\right\}.$$

Лотерею L_1 можно трактовать как описывающую ситуацию, когда некто покупает актив, приносящий гарантированный доход в 6%, и другую лотерею (L_2), описывающую, что случится при покупке актива, приносящего 3%, 6% либо 10% с вероятностями по 1/3. Рассмотрим теперь третью лотерею,

$$L_3 = \left\{\left(3, \frac{1}{4}\right), \left(5, \frac{1}{4}\right), \left(6, \frac{1}{4}\right), \left(10, \frac{1}{4}\right)\right\}.$$

Составная лотерея $pL_1 + (1-p)L_3$ имеет вид

$$\left\{\left(3, \frac{1-p}{4}\right), \left(5, \frac{1}{4}(1-p)\right), \left(6, \frac{1+3p}{4}\right), \left(10, \frac{1}{4}(1-p)\right)\right\}.$$

[1] Лотерея $pL_1 + (1-p)L_2$ называется **составной лотереей** и определяется так: если две лотереи L_1 и L_2 имеют одно и то же множество альтернатив, скажем,

$$L_1 = \{(w_i, p_i) : i = 1,\ldots,n\} \text{ и } L_2 = \{(w_i, p_i') : i = 1,\ldots,n\},$$

то любая вероятность p (т.е. $0 < p < 1$) порождает (составную) новую лотерею

$$pL_1 + (1-p)L_2 = \{(pw_i + (1-p)w_i, pp_i + (1-p)p_i') : i = 1,\ldots,n\}.$$

Если L_1 и L_2 имеют неодинаковые множества альтернатив, то можно рассмотреть объединение A всех возможных альтернатив обеих лотерей и считать, что L_1 и L_2 имеют одно и то же множество альтернатив A. Заметим, однако, что при этом альтернативы из L_2, которые не содержатся в L_1, имеют нулевую вероятность в лотерее L_1, а альтернативы из L_1, не попавшие в L_2, имеют нулевую вероятность в L_2. Таким образом, для любой вероятности p лотерея $pL_1 + (1-p)L_2$ корректно определена.

В свою очередь, составная лотерея $pL_2 + (1-p)L_3$ имеет вид

$$\left\{\left(3, \frac{3+p}{12}\right), \left(5, \frac{1-p}{4}\right), \left(6, \frac{3+p}{12}\right), \left(10, \frac{3+p}{12}\right)\right\}.$$

Предположим, что индивид предпочитает лотерею L_2 лотерее L_1, тогда, по аксиоме независимости, индивид должен предпочитать составную лотерею $pL_2 + (1-p)L_3$ составной лотерее $pL_1 + (1-p)L_3$ при любом $0 < p < 1$. ■

Как видно из примера, аксиома независимости налагает существенные ограничения на отношения предпочтения среди лотерей. Указывая, каким должно быть отношение предпочтения на семействе составных лотерей, если определено отношение предпочтения между двух простыми лотереями, она не дает возможности рассматривать составные лотереи, получаемые из данных простых, иначе, чем требует отношение предпочтения между двумя простыми лотереями, даже после включения третьей лотереи. С другой стороны, аксиома независимости, налагая ограничения на предпочтения среди составных лотерей, элиминирует отношение порядка, которое во многих случаях может оказаться достаточно парадоксальным.

Если к требованиям полноты, рефлексивности и транзитивности добавить требование непрерывности и независимости, то можно доказать, что удовлетворяющее им отношение предпочтения представимо функцией ожидаемой полезности. Это фундаментальный результат в экономике, известный как теорема об ожидаемой полезности, широко изучен в экономической литературе[1].

Рассмотрим следующую версию теоремы об ожидаемой полезности.

Теорема 1.24 (теорема об ожидаемой полезности). *Если предпочтения индивида $\succcurlyeq$ на множестве лотерей £ (в дополнение к полноте, рефлективности и транзитивности) удовлетворяют условиям независимости и непрерывности, то они представимы функцией ожидаемой полезности. Другими словами, при данных условиях существует функция полезности и на богатстве w, такая что для функции ожидаемой полезности $U: £ \to R$, определенной на любой лотерее $L = \{(w_1, p_1), (w_2, p_2), \ldots, (w_n, p_n)\}$ по правилу*

$$U(L) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(w_i),$$

выполняется следующее условие: $L_1 \succcurlyeq L_2$ тогда и только тогда, когда $U(L_1) \geq U(L_2)$.

Важное заключение из теоремы об ожидаемой полезности:

- *Рациональные индивиды, осуществляя выбор при неопределенности, могут использовать свои функции ожидаемой полезности.*

В завершение подраздела рассмотрим классификацию индивидов на основе их функций полезности Неймана — Моргенштерна. Классификация

[1] Обсуждения теоремы ожидаемой полезности можно найти в: [83, p. 156; 45, p. 76 (Proposition 3.1)]; 53, ch. 6].

учитывает отношение к риску, которое может быть отражено в характеристиках функции полезности на богатстве.

Определение 1.25. *Пусть u — функция полезности индивида на богатстве.*

(1) *Если функция полезности на богатстве линейна, т.е. имеет вид*

$$u(w) = aw\ ,\ \ a > 0\ ,$$

*то индивид **нейтрален к риску**.*

(2) *Если функция полезности на богатстве вогнута (соответственно строго вогнута), то говорят, что для индивида характерно **неприятие риска** (соответственно **строгое неприятие риска**, или индивид является **рискофобом**).*

(3) *Если функция полезности на богатстве выпукла (соответственно строго выпукла), то говорят, что индивид характеризуется **положительным отношением к риску** (соответственно **строго положительным отношением к риску**, или является **рискофилом**).*

Чтобы дать экономическую интерпретацию вышеизложенных определений, напомним определения вогнутых и выпуклых функций. Вещественнозначная функция $u : I \to R$, где I — вещественный интервал, называется

- **выпуклой**, если

$$u(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha u(x_1) + (1-\alpha)u(x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in I$, таких что $x_1 \ne x_2$, и $0 < \alpha < 1$.

Если неравенство строгое, то u называют **строго выпуклой**;

- **вогнутой**, если

$$u(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \ge \alpha u(x_1) + (1-\alpha)u(x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in I$, таких что $x_1 \ne x_2$ и $0 < \alpha < 1$.

Если неравенство строгое, то u называют **строго вогнутой**.

Стоит иметь в виду, что в соответствии с результатами, полученными методами математического анализа, дважды дифференцируемая функция $u : (a,b) \to R$, где (a,b) — открытый интервал числовой прямой, строго выпукла (соответственно строго вогнута) тогда и только тогда, когда $u''(w) > 0$ (соответственно $u''(w) < 0$) для любого $w \in (a,b)$.

Экономическая интерпретация предпочтений индивида-рискофоба довольно очевидна — индивид со строгим неприятием риска всегда предпочитает определенные, несомненные вещи играм. Покажем это. Предположим, что индивид имеет строго вогнутую функцию полезности на богатстве $u : [0,\infty) \to [0,\infty)$. Предположим, что ему предоставлен выбор между фиксированным количеством денег w и лотереей L, которая принесет w_1 с вероятностью p и w_2 с вероятностью $1-p$, как показано на рис. 1.10, *a*, так что ожидаемое значение лотереи L равно w, т.е.

$$w = Eu(L) = pw_1 + (1-p)w_2\ [1].$$

[1] В этом случае, конечно, $p = \dfrac{w_2 - w}{w_2 - w_1}$.

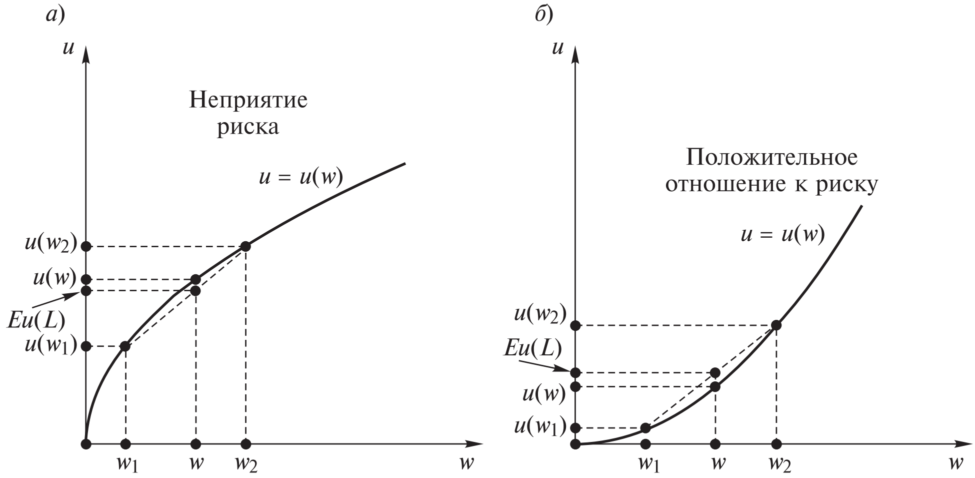

Рис. 1.10

Заметим, что ожидаемая полезность лотереи составляет

$$Eu(L) = pu(w_1) + (1-p)u(w_2)\ .$$

(См. снова рис. 1.10, *а*.) Поскольку *u* строго вогнута, то

$$u(w) = u(pw_1 + (1-p)w_2) > pu(w_1) + (1-p)u(w_2) = Eu(L)\ .$$

Таким образом, индивид предпочтет фиксированное количество *w* игре (лотерее) с ожидаемым выигрышем $pw_1 + (1-p)w_2$. Этот вывод иллюстрирует экономическое понятие строгого неприятия риска.

Обратная ситуация имеет место для индивидов с положительным отношением к риску. Если предоставлены два предложения, то условие строгой выпуклости означает, что

$$u(w) = u(pw_1 + (1-p)w_2) < pu(w_1) + (1-p)u(w_2) = Eu(L)\ ,$$

следовательно, индивид предпочтет игру, а не получение фиксированной суммы денег (см. рис. 1.10, *б*.)

Рассмотрим пример, который иллюстрирует теорему об ожидаемой полезности.

Пример 1.26. Предположим, что индивиду было предложено поучаствовать в двух играх. В одной из них, лотерее L_1, требуется заплатить 100 долл., после чего он сможет выиграть либо 500 долл., либо 100 долл. с вероятностью 1/2. Пусть функция полезности Неймана — Моргенштерна на богатстве для данного индивида имеет вид $u(w) = \sqrt{w}$ (следовательно, индивид — рискофоб). Тогда ожидаемая полезность от первой игры равна

$$Eu(L_1) = \frac{1}{2}\sqrt{500-100} + \frac{1}{2}\sqrt{100-100} = \frac{1}{2}\sqrt{400} = \frac{20}{2} = 10\ .$$

Во второй игре, лотерее L_2, также нужно заплатить 100 долл., далее он сможет выиграть либо 325 долл., либо 136 долл. с вероятностью 1/2.

Полезность от второй игры будет равна

$$Eu(L_2) = \frac{1}{2}\sqrt{325-100} + \frac{1}{2}\sqrt{136-100} = \frac{1}{2}\sqrt{225} + \frac{1}{2}\sqrt{36} = \frac{1}{2}(15+6) = 10,5 .$$

Таким образом, индивид предпочтет участвовать во второй игре, хотя в первой можно выиграть несколько бо́льшую сумму.

Если же предложить поучаствовать в этих играх индивиду с функцией полезности на богатстве $u(w) = w$ (т.е. нейтральному к риску), то, поскольку ожидаемая полезность от первой игры равна

$$Eu(L_1) = \frac{1}{2}(500-100) = 200 ,$$

а ожидаемая полезность от участия во второй игре равна

$$Eu(L_2) = \frac{1}{2}(325-100) + \frac{1}{2}(136-100) = \frac{1}{2}(225+36) = 130,5 ,$$

второй индивид, в отличие от первого, предпочтет участвовать в первой игре. ■

Разница в ожидаемой полезности для двух индивидов возникает, конечно же, в силу различий их функций полезности $u(w)$ на богатстве. Функция полезности на богатстве нейтрального к риску индивида такова, что ожидаемые полезности ранжируются точно так же, как и ожидаемые значения; и чем больше ожидаемое значение, тем больше ожидаемая полезность. Это происходит потому, что функция полезности на богатстве нейтрального к риску индивида является линейной по богатству. С другой стороны, функция полезности на богатстве индивида с неприятием риска вогнута по богатству, в результате чего ожидаемая полезность индивида с неприятием риска всегда больше от определенного (гарантированного) богатства w, т.е. богатства, которое он получает с вероятностью 1, чем от лотереи с ожидаемым богатством w, в которой есть вероятность получения чего-то меньшего, чем w. Это, как мы знаем, делает лотерею рискованной и отражается на выборе индивида с неприятием риска.

Достаточно часто ожидаемый доход в лотерее L описывается непрерывным распределением «дохода» с функцией плотности $f(r)$ на норме доходности r. В этом случае, если индивид, имеющий функцию полезности на богатстве $u(w)$, инвестирует W долл. в лотерею, то ожидаемая полезность для него от такой лотереи выражается формулой

$$Eu(L) = \int_{-1}^{\infty} u((1+r)W)f(r)dr .$$

Заметим, что $f(r)$ определена на интервале $[-1,\infty)$, где $r = -1$ является тем значением доходности, при котором богатство индивида обращается в нуль.

1.6.2. Приложение теоремы об ожидаемой полезности

В этом подразделе мы представим несколько приложений теоремы об ожидаемой полезности.

Пример 1.27 (приложение к страхованию). Предположим, что индивид владеет домом стоимостью W долл. Существует некоторая вероятность p того, что дом будет разрушен в результате пожара или наводнения. Предположим также, что индивид может приобрести страховку — право, при наступлении страхового случая, на возмещение (покрытие) ущерба в размере (каждого) доллара по цене x долларов. Здесь x является **страховой премией**. На покрытие какой величины возможного ущерба (или просто, на какую сумму) застрахуется индивид?

В общем случае индивид будет страховаться в соответствии со своим отношением к риску (т.е. в соответствии со своей функцией полезности $u(w)$) и стоимостью страхования (ценой страховки). Мы ожидаем, что индивид выберет оптимальный размер страховки.

Формально мы представляем этот выбор индивида как выбор, максимизирующий ожидаемую полезность от его (случайного) богатства. В основе его выбора лежит теорема об ожидаемой полезности. Таким образом, размер страховки (размер покрытия ущерба) q, который будет выбран индивидом, должен максимизировать его ожидаемую полезность:

$$E(q) \equiv Eu(q) = pu(q - xq) + (1 - p)u(W - xq)\,. \qquad (*)$$

Формула объясняется следующим образом. Если дом будет разрушен, то владелец получит возмещение (части) ущерба в размере q за вычетом своего страхового взноса xq, в целом сумму в $q - xq$ долларов. Поскольку вероятность от величины богатства в случае разрушения дома равна p, то ожидаемая полезность богатства в случае разрушения дома составляет величину $pu(q - xq)$. С другой стороны, с вероятностью $1 - p$ дом останется целым, и ожидаемая полезность в таком случае окажется равной $(1 - p)u(W - xq)$.

Заметим, что функция u не определена для отрицательных значений богатства, поэтому из (*) следует, что $W - xq \geq 0$, или $q \leq \dfrac{W}{x}$. Выполнение этого неравенства гарантирует, что областью определения функции $E(q)$ в данном случае является замкнутый интервал $\left[0, \dfrac{W}{x}\right]$.

Теперь предположим, что W = 100 000 долл., p = 0,01 и x = 0,02. Как мы сейчас увидим, метод оптимизации $E(q)$ зависит от типа индивида. Проанализируем ситуацию отдельно для каждого из трех случаев.

Случай I. *Индивид является рискофобом с функцией полезности* $u(w) = \sqrt{w}$.

В данном случае из (*) следует, что

$$E(q) = p\sqrt{(1-x)q} + (1-p)\sqrt{(W-xq)} =$$

$$= 0,01 \times \sqrt{0,98q} + 0,99 \times \sqrt{W - 0,02q} =$$

$$= 0,01[\sqrt{0,98q} + 99 \times \sqrt{(W - 0,02q)}]\,.$$

График функции $E(q)$ показан на рис. 1.11. Вычислим теперь производную этой функции:

$$E'(q) = 0,01\left[\frac{0,98}{2\sqrt{0,98q}} - \frac{99 \times 0,02}{2\sqrt{(W-0,02q)}}\right] = 0,05\left[\sqrt{\frac{0,98}{q}} - \frac{1,98}{\sqrt{(W-0,02q)}}\right].$$

Приравнивая ее нулю, $E'(q) = 0$, получим следующее уравнение относительно q: $\sqrt{\frac{0,98}{q}} = \frac{1,98}{\sqrt{(W-0,02q)}}$. Возведя обе части этого уравнения в квадрат, получим, что $\frac{0,98}{q} = \frac{(1,98)^2}{W - 0,02q}$ или $0,98(W - 0,02q) = 3,9204q$. Теперь, положив $W = 100\,000$, получим $98\,000 - 0,019q = 3,9204q$ или $3,94q = 98\,000$. Или $q = \frac{98\,000}{3,94} = 24873,10$ долл.

Случай II. *Индивид является рискофилом с функцией полезности* $u(w) = w^2$. Вычислим ожидаемую полезность из (*):

$$E(q) = 0,01(0,98q)^2 + 0,99(W - 0,02q)^2 =$$

$$= 0,01[0,9604q^2 + 99(W^2 - 0,04Wq + 0,0004q^2)] = 0,01(q^2 - 3,96Wq + 99W^2)\,.$$

График этой функции представлен на рис. 1.11. Заметим, что $q = 0$ является точкой максимума $E(q)$, откуда получаем, что агент-рискофил не будет покупать страховку.

Случай III. *Индивид нейтрален к риску и имеет функцию полезности* $u(w) = w$.

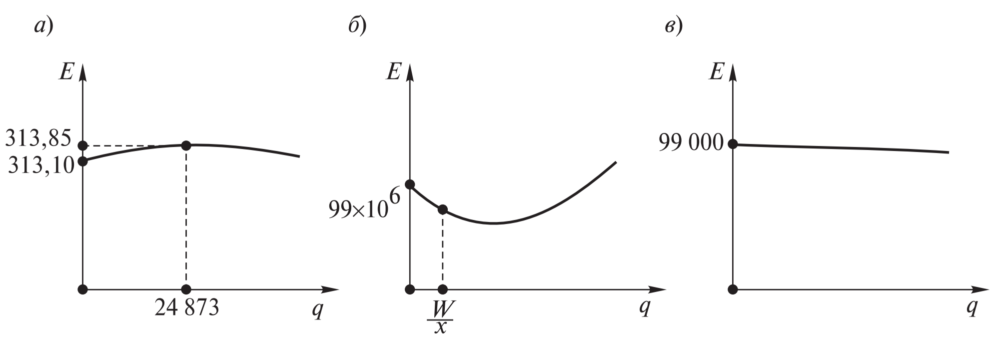

Рис. 1.11. Индивид с неприятием риска (*а*); индивид с положительным отношением к риску (*б*); нейтральный к риску индивид (*в*)

Ожидаемая полезность здесь имеет вид

$$E(q) = p(1-x)q + (1-p)(W - xq) = [p(1-x) - (1-p)x]q + (1-p)W =$$

$$= (p-x)q + (1-p)W = -0{,}01q + 99\,000\,,$$

т.е. линейна по q (см. рис. 1.11). Эта функция достигает максимума при $q = 0$. Таким образом, если премия составляет 2 цента на покрытие каждого доллара ущерба, то дом стоимостью 100 тыс. долл., который может быть разрушен в результате пожара или наводнения в одном случае из ста, будет застрахован на сумму в 24 873 долл. агентом-рискофобом с функцией полезности $u(w) = \sqrt{w}$ и не будет застрахован вообще ни агентом-рискофилом с функцией полезности $u(w) = w^2$, ни нейтральным к риску агентом с функцией полезности $u(w) = w$. ■

Следующие три примера иллюстрируют выбор оптимального портфеля из нескольких инвестиционных возможностей.

Пример 1.28 (выбор оптимального портфеля). Предположим, что индивиду требуется инвестировать 10 тыс. долл. в акции и облигации. Акция представляет собой финансовый актив, который позволяет получить доход в 2% с вероятностью 37% и доход в 10% с вероятностью 63%. Облигация приносит фиксированный доход в 7%. Индивид является рискофобом и обладает функцией полезности на богатстве $u(w) = \sqrt{w}$.

Сталкиваясь с выбором между вложениями денег в акцию или облигацию, индивид выберет портфель, который максимизирует ее «достаток».

- *Существует ли способ нахождения того оптимального портфеля, который скорее всего и будет выбран индивидом?*

При заданной функции полезности на богатстве обоснованным прогнозом будет выбор портфеля, максимизирующего ожидаемую полезность.

Пусть s — доля (от 10 тыс. долл.), вложенная в акции, где, конечно, $0 \le s \le 1$. Инвестор имеет шанс в 37% получения

$$10\,000s \times 1{,}02 + 10\,000(1-s) \times 1{,}07 = 10\,000(1{,}07 - 0{,}05s)\,,$$

и шанс в 63% получения

$$10\,000s \times 1{,}1 + 10\,000(1-s) \times 1{,}07 = 10\,000(1{,}07 + 0{,}03s)\,.$$

Ожидаемая полезность инвестора $E(s) = Eu(s)$ имеет вид

$$E(s) = 0{,}37\sqrt{10\,000(1{,}07 - 0{,}05s)} + 0{,}63\sqrt{10\,000(1{,}07 + 0{,}03s)} =$$

$$= 37\sqrt{1{,}07 - 0{,}05s} + 63\sqrt{1{,}07 + 0{,}03s} = 37(1{,}07 - 0{,}05s)^{\frac{1}{2}} + 63(1{,}07 + 0{,}03s)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Рациональный инвестор выберет значение s, которое максимизирует его ожидаемую полезность $E(s)$. Дифференцируя выражение для $E(s)$, получаем, что

$$E'(s) = -37 \times \frac{1}{2} \times 0,05(1,07 - 0,05s)^{-\frac{1}{2}} + 63 \times \frac{1}{2} \times 0,03(1,07 + 0,03s)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 0,945(1,07 + 0,03s)^{-\frac{1}{2}} - 0,925(1,07 - 0,05s)^{-\frac{1}{2}}$$

и

$$E''(s) = -[0,014175(1,07 + 0,03s)^{-\frac{3}{2}} + 0,023125(1,07 - 0,05s)^{-\frac{3}{2}}] < 0 .$$

Доля вложений в акции — величина s — удовлетворяет следующему условию (первого порядка):

$$E'(s) = 0,945(1,07 + 0,03s)^{-\frac{1}{2}} - 0,925(1,07 - 0,05s)^{-\frac{1}{2}} = 0 ,$$

или

$$0,945\sqrt{1,07 - 0,05s} = 0,925\sqrt{1,07 + 0,03s} .$$

Возведя в квадрат обе части этого выражения, получаем

$$0,89302(1,07 - 0,05s) = 0,8556(1,07 + 0,03s) ,$$

откуда, после раскрытия скобок,

$$0,9555 - 0,0446s = 0,9155 + 0,0257s ,$$

или $0,04 = 0,0703s$. Таким образом,

$$s = \frac{0,04}{0,0703} = 0,56899 \approx 56,9\% .$$

Это показывает, что инвестор вложит 51,9% от 10 тыс. долл. в акции, а оставшееся 43,1% — в облигации. ■

Пример 1.29 (снижение риска и выбор портфеля). Предположим, что индивид желает инвестировать 10 тыс. долл. в акции двух видов, а именно в акции компании «Сервис инк.» (Service Inc., *S*) и акции компании «Мануфекчеринг Инк.» (Manufacturing Inc., *M*). Оба типа акций представляют собой рисковые активы в том смысле, что каждая из них с некоторой вероятностью может принести как высокий доход, так и низкий. Доходности акций, однако, не являются независимыми, и совместное распределение доходов изображено в табл. 1.3.

Это совместное распределение доходности двух активов показывает следующее: вероятность того, что доходность акций одной компании высока, когда доходность акций другой низкая, оказывается высокой; в то же время вероятность того, что оба актива будут приносить высокий доход, либо оба

Таблица 1.3. Доходность акций *S* и *M*

	Доходность акции *M*		
Доходность акции *S*		20%	5%
	5%	0,4	0,1
	20%	0,1	0,4

этих актива принесут низкий доход, оказывается низкой. Инвестор, который рассчитывает вложить в эти активы 10 тыс. долл., является рискофобом и имеет функцию полезности на богатстве, заданную в виде $u(w) = \sqrt{w}$.

Как и в предыдущем примере, при заданной функции полезности на богатстве индивид выберет такой портфель, который максимизирует его ожидаемую полезность. Пусть $0 \le s \le 1$ — доля (от 10 тыс. долл.), вложенная в акции *S*, и, следовательно, $1 - s$ — доля вложений в акции *M*. Тогда ожидаемая полезность инвестора составит

$$E(s) = 0,4\sqrt{10^4 \times 1,05s + 10^4 \times 1,20(1-s)} + 0,1\sqrt{10^4 \times 1,05} +$$

$$+ 0,4\sqrt{10^4 \times 1,20s + 10^4 \times 1,05(1-s)} + 0,1\sqrt{10^4 \times 1,20} =$$

$$= 40\sqrt{1,20 - 0,15s} + 40\sqrt{1,05 + 0,15s} + 10\sqrt{1,05} + 10\sqrt{1,20} .$$

Тест первого порядка $E'(s) = 0$ на максимум дает следующее уравнение относительно *s*:

$$E'(s) = \frac{40(-0,15)}{2\sqrt{1,20 - 0,15s}} + \frac{40(0,15)}{2\sqrt{1,05 + 0,15s}} = 0 .$$

Из этого уравнения следует, что

$$1,05 + 0,15s = 1,20 - 0,15s ,$$

что сводится к виду $0,3s = 0,15$. Следовательно,

$$s = \frac{0,15}{0,3} = 0,5 = 50\% .$$

Отсюда следует, что инвестор вложит ровно 50% от 10 тыс. долл. в акции *S*, и остальные 50% — в акции *M*.

При более тщательном рассмотрении распределения доходов становится понятным, почему инвестор предпочтет иметь существенные объемы обоих типов акций, даже если вероятность высокого дохода или низкого дохода от обоих типов акций оказывается примерно одинаковой. Когда акция *S* приносит высокий доход, акция *M* приносит низкий доход; когда же доход от акции *M* высок, доход от акции *S* низок. То есть доходы от двух акций движутся в противоположных направлениях, или они *отрицательно коррелированы*. И таким образом, когда оба типа акций содержатся в портфеле инфестора, значительно снижается риск такого портфеля, так как низкий доход от одного актива компенсируется высоким доходом от другого. ■

Пример 1.30 (еще раз о выборе оптимального портфеля). Предположим, что индивиду требуется распределить инвестиции в размере 10 тыс. долл. между акциями и облигациями. Акция представляет собой финансовый актив с доходностью, которая является равномерно распределенной случайной величиной со средним значением в 8,525% и стандартным отклонением в 3,767%. Облигация приносит фиксированный доход в 8,5%. Индивид является рискофобом, и его функция полезности на богатстве задается в виде $u(w)=\sqrt{w}$.

Как и в предыдущих примерах, индивид сталкивается с выбором между вложением денег в акции и облигации и выберет такой портфель, который принесет максимум его ожидаемой полезности. Пусть $0 \le s \le 1$ — доля от 10 тыс. долл., вложенная в акции. В этом случае ожидаемая полезность инвестора составит

$$Eu(s)=\frac{1}{b-a}\int_a^b \sqrt{10\,000s(1+r)+10\,000(1-s)\times 1{,}085}\,dr=$$

$$=100\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \sqrt{(r-0{,}085)s+1{,}085}\,dr\right],$$

где $[a,b]$ — интервал возможных значений доходности по акции, а r — доходность акции.

Поскольку мы имеем дело с равномерным распределением со средним 0,08525 и стандартным отклонением 0,03767, из примера 1.16 следует, что

$$\frac{a+b}{2}=0{,}08525 \text{ и } \frac{(b-a)\sqrt{3}}{6}=0{,}03767 .$$

Имеем систему: $a+b=0{,}1705$, $b-a=\dfrac{6\times 0{,}03767}{\sqrt{3}}=0{,}1305$, решив которую, находим a = 0,02 и b = 0,1505. Таким образом,

$$E(s)=766{,}28\int_{0{,}02}^{0{,}1505} \sqrt{(r-0{,}085)s+1{,}085}\,dr .$$

Сделав замену $x=r-0{,}085$, получим

$$E(s)=766{,}28\int_{-0{,}065}^{0{,}0655}(xs+1{,}085)^{\frac{1}{2}}\,dx=$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{766{,}28}{s}(xs+1{,}085)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=-0{,}065}^{x=0{,}0655}=$$

$$=510{,}85\frac{(0{,}0655s+1{,}085)^{\frac{3}{2}}-(1{,}085-0{,}065s)^{\frac{3}{2}}}{s} .$$

После дифференцирования по x имеем

$$E'(s)=\frac{510{,}85}{s^2}[0{,}09825s(0{,}0655s+1{,}085)^{\frac{1}{2}}+0{,}0975(1{,}085-0{,}065s)^{\frac{1}{2}}-$$

$$-(0{,}0655s+1{,}085)^{\frac{3}{2}}+(1{,}085-0{,}065s)^{\frac{3}{2}}] .$$

Теперь необходимо найти решение уравнения $E'(s)=0$, представляющего собой условие первого порядка. Поскольку выражение представляется достаточно сложным, для нахождения решения придется воспользоваться компьютерной программой! Однако даже с помощью калькулятора можно убедиться в том, что из $E'(s)=0$ следует, что

$$s \approx 0{,}935 = 93{,}5\% .$$

Это означает, что инвестор вложит 93,5% от 10 тыс. долл. в акции; а остаток, 6,5%, в облигации. ■

Мы представили «теорию ожидаемой полезности» как теорию поведения при неопределенности. Однако иногда эта теория оказывается неспособной описать, каким образом индивиды фактически принимают решения. Действительно, если бы индивиды были рискофобами или нейтральными к риску, то теория ожидаемой полезности не была бы способна объяснить, почему организаторы лотерей зарабатывают на этом деньги, поскольку ожидаемый доход от лотереи обычно отрицателен. Или почему казино оказываются такими прибыльными, несмотря на то что шансы клиентов обычно малы. Например, если проанализировать лотерею Powerball с джекпотом в 7 млн долл., шанс выигрыша в которой составляет 1 к 85 000 000, а цена билета равна 1 долл., то обнаружим, что ожидаемая величина выигрыша составляет

$$(7\,000\,000 - 1) \times \frac{1}{85\,000\,000} + (-1) \times \frac{84\,999\,999}{85\,000\,000} = -0{,}917647 .$$

Ожидаемое значение выигрыша при участии в лотерее Powerball обычно отрицательно. Следовательно, в соответствии с теорией ожидаемой полезности даже нейтральный к риску индивид не станет покупать лотерейный билет. Однако индивиды, которые в других условиях ведут себя как рискофобы, часто покупают лотерейные билеты.

Подобное кажущееся аномальным поведение также наблюдалось и в экспериментах с лотереями. Первый такой эксперимент, проведенный Морисом Аллэ[1], теперь известен как *парадокс Аллэ* и показывает, что поведение индивидов может не соответствовать теории ожидаемой полезности. Рассмотрим следующие лотереи.

- *Лотерея 1*: Возможность получить с гарантией 2 млн долл.
- *Лотерея 2*: Возможность получить 10 млн долл. с вероятностью 15%, 2 млн долл. с вероятностью 75%, и ничего с вероятностью 10%.
- *Лотерея 3*: Возможность получить 2 млн долл. с вероятностью 25% и ничего с вероятностью 75%.
- *Лотерея 4*: Возможность получить 10 млн долл. с вероятностью 15% и ничего с вероятностью 85%.

Если предлагается сделать выбор между лотереями 1 и 2 и лотереями 3 и 4, индивиды чаще всего предпочтут лотерею 1 лотерее 2 и лотерею 4 лотерее 3. Но, как мы покажем, такая последовательность выборов противоречит теории ожидаемой полезности. Если индивид предпочитает лотерею 1 лотерее 2, то в соответствии с теорией ожидаемой полезности

$$u(2) > 0{,}15u(10) + 0{,}75u(2) + 0{,}1u(0) ,$$

или

$$0{,}25u(2) > 0{,}15u(10) + 0{,}1u(0) .$$

[1] См., например, [6].

Добавим $0,75u(0)$ к обеим частям неравенства и получим

$$0,25u(2)+0,75u(0)>0,15u(10)+0,85u(0).$$

Последнее неравенство показывает, что индивид должен предпочитать лотерею 3 лотерее 4. Таким образом, индивид, который выбирает лотерею 4, а не лотерию 3, не ведет себя в соответствии с постулатами теории ожидаемой полезности. Данный феномен, именуемый в литературе **инверсией предпочтений**, наблюдался и в дальнейшем во многих иных ситуациях. Это также объясняет, почему индивиды, которые покупают лотерейные билеты, в других случаях ведут себя как рискофобы. Типичная лотерея представляет собой ситуацию, где за небольшую сумму денег индивид получает небольшой шанс выиграть очень большую сумму, так что они часто игнорируют факт отрицательности ожидаемого выигрыша, поскольку потери при этом обычно невелики. Но если потенциальные потери будут намного больше, тот же самый индивид может совершить иной выбор.

Подобные ситуации в теории ожидаемой полезности далеко не редкость. Поэтому использовать теорию ожидаемой полезности для предсказания поведения при неопределенности следует с осторожностью. Теорию следует рассматривать скорее как набор принципов рационального поведения при неопределенности. Таким образом, индивид, который в полной мере осознает следствия всех аксиом теории ожидаемой полезности, всегда захочет использовать ее как «наиболее приемлемый способ» принятия решений при неопределенности.

Упражнения

1. Индивид с функцией полезности $u(w)=w$ на богатстве инвестирует W долл. в лотерею с непрерывным распределением доходности (со ставкой r). Какой будет его ожидаемая полезность? [Ответ: $(1+m)W$, где m — математическое ожидание распределения.]
2. Функция полезности индивида на богатстве имеет вид $u(w)=\sqrt{w}$. Сколько он будет готов заплатить за лотерею, которая выигрывает 1 млн долл. с вероятностью 0,0015 и ничего не выигрывает в противном случае?
3. Представьте, что вы нейтральны к риску и ваше богатство составляет 10 тыс. долл. Вы подумываете об открытии филиальной сети по производству пончиков. Для открытия сети вам необходимо инвестировать 5000 долл. При этом вы с вероятностью 1/3 можете заработать 500 тыс. долл., с вероятностью 1/3 только покрыть свои расходы и с оставшейся вероятностью потерять все свои инвестиции. Каким будет ваше решение? При каких других значениях вероятностей решение изменится?
4. Каким будет ответ, если в упражнении 3 изменить функцию полезности на $u(w)=\ln w$?

5. В примере 1.27 обсуждалось, какое количество страховки приобретет индивид. Предположим, что при покупке страховки необходимо приобретать покрытие на сумму в размере 80% от стоимости дома. Какую страховую премию агент будет готов заплатить за дом стоимостью 100 тыс. долл., если его функция полезности $u(w) = \sqrt{w}$?

6. Рассмотрим задачу страхования из примера 1.27 с параметрами W, p и x. Какой объем страхового покрытия q купит рискофоб с функцией полезности на богатстве $u(w) = 1 - e^{-w}$? Выразите q через параметры W, p и x. [Ответ: $q = W + \ln\frac{p(1-x)}{x(1-p)}$.]

7. Каков будет ответ на вопрос предыдущего упражнения, если функция полезности будет иметь вид $u(w) = w$?

8. Во многих казино ожидаемая величина выигрыша отрицательна. Агентов какого типа вы скорее всего встретите в этих казино?

9. Предположим, что индивиду требуется распределить инвестиции в размере 10 тыс. долл. между вложениями в акции и облигации. Акция представляет собой финансовый актив, который позволяет получить доход в 5% с вероятностью 79,5% и доход в 15% с вероятностью 20,5%. Облигация приносит фиксированный доход в 7%. Индивид является рискофобом, и его функция полезности на богатстве задается как $u(w) = \sqrt{w}$. Какой портфель выберет индивид? [Ответ: акции 67,5%; облигации 32,5%.]

10. Имея в виду пример 1.30, рассмотрим агента-рискофила с функцией полезности $u(w) = w^2$. Покажите, что

(a) его ожидаемая полезность задается формулой

$$Eu(s) = 10^8\left[\frac{1}{0{,}1305}\int_{0{,}02}^{0{,}1505}[(r - 0{,}085)s + 1{,}085]^2 dr\right] =$$

$$= 10^4(14{,}1925s^2 + 4{,}525s + 11\,772{,}25),$$

где $0 \le s \le 1$ — доля от 10 тыс. долл., которая инвестирована в акции.

(b) $Eu(s)$ достигает максимума при $s = 1$. То есть покажите, что агент-рискофил будет вкладывать все деньги в акции.

11. Снова имея в виду пример 1.30, рассмотрим нейтрального к риску агента с функцией полезности $u(w) = w$. Покажите, что

(a) ожидаемая полезность задается формулой

$$Eu(s) = \frac{10^4}{0{,}1305}\int_{0{,}02}^{0{,}1505}[(r - 0{,}085)s + 1{,}085]dr =$$

$$= 2{,}5s + 10\,850),$$

где $0 \le s \le 1$ — доля из 10 тыс. долл., которая инвестирована в акции;

(b) $Eu(s)$ достигает максимума при $s = 1$. То есть покажите, что нейтральный к риску агент будет вкладывать все деньги в акции.

12. Рассмотрим множество натуральных чисел $N = \{1, 2, \ldots\}$, и для каждого $n \in N$ положим $p_n = \dfrac{4}{5^n}$. Установите следующее.

(a) Построенная последовательность $\{p_1, p_2, \ldots\}$ образует распределение вероятностей на N. То есть $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. В частности, мы имеем лотерею

$$L = \left\{\left(1, \frac{4}{5}\right), \left(2, \frac{4}{5^2}\right), \ldots, \left(n, \frac{4}{5^n}\right), \ldots\right\}.$$

(b) Сколько готов будет заплатить за участие в этой лотерее индивид, имеющий функцию полезности на богатстве вида $u(w) = w$?

(c) Сколько готов будет заплатить за участие в лотерее L другой индивид, имеющий функцию полезности на богатстве вида $u(w) = \sqrt{w}$?

Учебное издание

Серия «Переводные учебники ВШЭ»

Караламбос Дионисиос Алипрантис
Субир Кумар Чакрабарти

ИГРЫ И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

Зав. редакцией *Е.А. Бережнова*
Редактор *Н.Б. Бартошевич-Жагель*
Художественный редактор *А.М. Павлов*
Компьютерная верстка и графика: *О.А. Пелипенко*
Корректор *Е.Е. Андреева*

Подписано в печать 15.12.2015. Формат 70×100 1/16
Печать офсетная. Гарнитура Newton
Усл. печ. л. 44,2. Уч.-изд. л. 34,3. Тираж 1000 экз. Изд. № 1703

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, Москва, ул. Мясницкая, д. 20
Тел./факс: (499) 611-15-52

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская обл., г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
www.chpd.ru, e-mail: sales@chpd.ru,
тел.: 8 (495) 988-63-76,
тел./факс: 8 (496) 726-54-10

9 785759 810971