У Ч Е Б Н И К И

ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ ЭКОНОМИКИ

УЧЕБНИКИ
ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ ЭКОНОМИКИ

А.В. Захаров

ТЕОРИЯ ИГР В ОБЩЕСТВЕННЫХ НАУКАХ

Рекомендовано
Финансовым университетом
при Правительстве Российской Федерации
к использованию в качестве учебника
в образовательных учреждениях,
реализующих образовательные программы ВПО
по дисциплине «Дополнительные главы теории игр»
по направлениям подготовки 080000
«Экономика и управление»

Издательский дом
Высшей школы экономики

Москва, 2015

УДК 519.813:303.7
ББК 22.1я7
З-38

Рецензент — проректор по магистратуре и аспирантуре
Финансового университета при Правительстве Российской Федерации,
доктор экономических наук, профессор
Л.И. Гончаренко

Научный редактор — доктор физико-математических наук
А.В. Савватеев

З-38 **Захаров, А. В**. Теория игр в общественных науках [Текст] : учебник для вузов / А. В. Захаров ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». — М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2015. — (Учебники Высшей школы экономики). — 304 с. — 1500 экз. — ISBN 978-5-7598-1180-0 (в пер.).

В учебнике излагаются основы некооперативной теории игр и разбираются примеры из различных областей экономики и политической науки. Для понимания материала необходимо знание математического анализа и теории вероятностей на уровне первого курса.

Книга может быть использована как основной учебник по семестровому курсу теории игр для студентов бакалавриата или магистратуры, не изучавших предмет ранее, или для более короткого повторного курса.

УДК 519.813:303.7
ББК 22.1я7

Учебное издание
Серия «Учебники Высшей школы экономики»

Алексей Владимирович Захаров

Теория игр в общественных науках

Зав. редакцией *Е.А. Бережнова*
Редактор *И.Л. Легостаева*
Художественный редактор *А.М. Павлов*
Компьютерная верстка и графика: *И.Г. Андреева*
Корректор *И.Л. Легостаева*

Подписано в печать 28.11.2014. Формат 70×100/16. Печать офсетная
Усл.-печ. л. 24,7. Уч.-изд. л. 22,0. Тираж 1500 экз. Изд. № 1771

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, Москва, ул. Мясницкая, 20. Тел./факс: (499) 611-15-52

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская обл., г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
www.chpd.ru, e-mail: sales@chpd.ru, тел.: 8 (495) 988-63-76, тел./факс: 8 (496) 726-54-10

ISBN 978-5-7598-1180-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ НАУЧНОГО РЕДАКТОРА

В настоящее время имеется множество книг по теории игр на русском языке, однако необходимость в написании, как минимум, еще одной такой книги у меня не вызывает сомнений.

Причина здесь кроется в том факте, что термин «теория игр» существенным образом многозначный. Во-первых, существует теория игр в рамках общей теории исследования операций (игры с нулевой суммой, потенциальные игры и методы численного решения). Во-вторых, есть теория игр с точки зрения чистой математики (теоремы о неподвижных точках, параметрические задачи на максимум, поведение многозначных отображений, многоцелевое динамическое программирование). В-третьих, можно говорить о теории игр с точки зрения математической логики («детские» игры с последовательными ходами, в которых нужно отыскать оптимальную стратегию одного из двух игроков, теорема Цермело и метод обратной индукции, алгоритмическая сложность поиска равновесий Нэша). В-четвертых, можно говорить о теории игр с точки зрения экономики и политической науки (гербарий сюжетов, так или иначе концентрирующийся вокруг трагедии общин и иных примеров неэффективности равновесий по Нэшу). Все перечисленные «теории игр» — это совершенно разные науки! И по методам, и по характеру формулируемых задач, и по тому математическому аппарату, который является в каждой из них центральным.

Предлагаемая читателю «Теория игр в общественных науках» посвящена решению не очень простой задачи. А именно, разъяснить не-математикам основы теории игр *на строго научном языке*. Такая попытка является достаточно рискованной. В то же время, учитывая то, что данная книга —

(А) *почти единственный* текст на русском языке, где подробно обсуждаются аукционы, задача дизайна механизмов, а также сигнальные игры и равновесия в них, в рамках общей теории динамических игр с неполной информацией [1];

(Б) возможно, не единственная, но исключительно удачная попытка разъяснить базовые для современного экономиста вещи на строгом уровне (равновесия в играх голосования и политические равновесия, решение по доминированию в модели олигополии Курно, а также целый ряд других классических сюжетов, входящих в необходимый минимум любого работающего экономиста);

[1] Часть этого материала разбирается в книгах Печерского и Беляевой [2001], Писарука [2013], Васина и Морозовой [2003], Данилова [2002] и в некоторых других книгах.

(B) в числе прочего, «малая энциклопедия», или «джентльменский набор» сюжетов, которыми оперирует любой грамотный экономист-теоретик,

я полагаю, что риск, предпринятый автором, оправдан.

Научное редактирование не коснулось части разобранных в книге примеров, однако все они в свое время были проработаны во время семинарских и лекционных занятий в Высшей школе экономики. И автор, и научный редактор с благодарностью учтут все присланные замечанные вами опечатки и неточности при последующем переиздании книги после первой «пробы читателем».

Алексей Савватеев,
доктор физико-математических наук

Васин А.А., *Морозов В.В.* Введение в теорию игр с приложениями в экономике. Учеб. пособ. М.: 2003.

Данилов В. Лекции по теории игр. М.: New Economic School, 2002.

Печерский Л., *Беляева А.А.* Теория игр для экономистов: Вводный курс. Учеб. пособ. СПб.: Изд-во Европ. ун-та в С.-Петербурге, 2001.

Писарук Н.Н. Введение в теорию игр. 2013. <http://pisaruk.narod.ru/books/games.pdf>.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Люди, организации и государства все время взаимодействуют друг с другом. Как поступит каждый, когда его выигрыш зависит не только от его собственного выбора, но и от чьего-то другого? Теория игр — это раздел прикладной математики, позволяющий осмыслить принимаемые в подобных ситуациях решения. Теория игр широко используется в экономике, а также в политологии, социологии и науке об управлении.

Эта книга написана на основе курсов, читаемых автором на факультетах экономики и прикладной математики Высшей школы экономики в Москве на протяжении последних четырех лет. Книга адресована студентам бакалавриатов и магистратур высших учебных заведений, изучающих экономику, политологию, менеджмент, прикладную математику. Предполагается, что читатель владеет основами математического анализа (дифференциальное и интегральное исчисление), а также основами теории вероятностей. Книга также может представлять интерес для студентов магистратуры (особенно, не изучавших предмет ранее) и любого читателя, желающего подготовить себя к чтению международной академической литературы в области экономики или политологии.

При составлении книги автор преследовал три непростые и отчасти противоречивые задачи.

Во-первых, книга должна содержать достаточно большой, но не чрезмерный, объем формальных математических определений, теорем и доказательств, составляющих костяк теории. С одной стороны, книга задумывалась как учебник, предназначенный для студентов бакалавриатов экономических вузов, что предполагало наличие у читателя знания математического анализа, по крайней мере, на начальном уровне. С другой стороны, целью книги не являлся обзор (пусть даже поверхностный) всего инструментария, разработанного по сей день, или формулирование утверждений как можно в более общей форме. Таким образом, необходимо было достичь компромисс между доступностью и общностью (и в значительно меньшей мере — между доступностью и точностью) формулировок и объемом.

Во-вторых, книга должна быть «живой», т.е. содержать большое число примеров применения теории в таких общественных науках, как экономика или политология, чтобы поддерживать интерес читателя и не допускать ощущения, что теория оторвана от реальности и от предметной области читателя. Книга должна быть способна заинтересовать незнакомого с предметом читателя.

В-третьих, как подбор математических утверждений, так и подбор примеров и задач должны быть современными и актуальными. Наука быстро меняется. Те ветви теории, которые казались перспективными (и даже необходимыми) двадцать–тридцать лет назад, сегодня представляют лишь исторический интерес — т.е. не используются в экономической, политологической или иной науке. В то же время появились новые направления. Поэтому одним из критериев отбора задач для книги являлся индекс цитирования работ, откуда они были взяты.

Структура книги следует более-менее установившемуся стандарту для учебников среднего и продвинутого уровней по данному предмету. Учебник разделен на четыре главы.

Первая глава посвящена статическим играм с полной информацией. Приводится определение игры в нормальной форме, определения доминирования, смешанных стратегий и равновесия Нэша. В качестве приложения приводится доказательство теоремы Нэша о существовании равновесия.

Во второй главе рассматриваются динамические игры с полной информацией. Помимо совершенства по подыграм для конечных игр, в главе говорится о конечно и бесконечно повторяющихся играх. Также дается определение совершенного марковского равновесия в повторяющихся играх (это — очень востребованная в наше время аналитическая концепция) и разбираются несколько задач, использующих такую игровую постановку.

Третья глава имеет два раздела. Во-первых, это байесовы игры, или статические игры с неполной информацией. Во-вторых, в главе излагаются основы теории дизайна механизмов и теории аукционов. В частности, формулируется и доказывается теорема об эквивалентности доходов в аукционах, даются определения и условия Нэш-реализуемости и реализуемости в доминирующих стратегиях.

Наконец, четвертая глава посвящена динамическим играм с неполной информацией. Большое внимание уделяется изложению различных концепций решения для таких игр (секвенциального равновесия, совершенного равновесия) и их взаимосвязи, сигнальным играм, играм с сообщениями.

В книге разбираются или предлагаются для самостоятельного решения около 200 примеров и задач, в том числе и стандартные примеры из области экономики — производство общественных благ, объемная и ценовая конкуренция, аукционы, некоторые макроэкономические модели. Значительная часть примеров приходится и на политологические темы, такие как поведение политиков и избирателей на выборах, лоббирование, моделирование решений в авторитарных политических системах, возникновение массовых протестов.

Для вводного курса в теорию игр объемом в один семестр в качестве основного текста можно использовать первые две главы данной книги, а также (в зависимости от скорости освоения материала) начало третьей главы. Вся книга может быть использована в качестве учебника в рамках двухсеместровых курсов, рассчитанных на студентов 3–4 года обучения. Книга также может быть использована в качестве вспомогательного материала для продвинутого курса по политологии или политической экономике.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность К.С. Сорокину, помогавшему мне вести курсы в Высшей школе экономики (ему же принадлежит доказательство теоремы 4.1); А.В. Савватееву, проведшему большую работу по научному редактированию текста; Д.С. Карабекяну, редактировавшему тексты задач; Ф.Т. Алескерову, С.Б. Измалкову, а также всем студентам, с которыми я работал и которые помогали мне находить ошибки в этом тексте.

1

ГЛАВА

СТАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Ранним утром 14 октября 1066 г. войска короля Гарольда, правителя Англосаксонского королевства, стояли на высоком холме рядом с местечком под названием Гастингс и готовились к бою. Двумя неделями ранее Вильгельм, герцог Нормандский, вторгся на земли Гарольда, желая присвоить их себе и щедро наградить ими своих подданных. И вот настал день большого сражения.

Войско нормандцев, в основном состоявшее из тяжело вооруженных всадников, обрушилось на пеших англосаксов, стоявших щитом к щиту на вершине холма. Первая атака была отбита: потеряв много убитых и раненых, нормандцы отступили, чтобы напасть снова.

Раз за разом они атаковали. Наконец, когда уже почти стемнело, всадникам все-таки удалось пробить брешь в обороне англичан. Войско Гарольда вдруг дрогнуло и побежало. Король был убит; немногим удалось спастись. Англия была завоевана — в последний раз в своей долгой истории.

Почему исход сражения решился так быстро? Каждый воин, стоя в строю, преследовал две (иногда противоположные) цели: выполнить свой воинский долг и остаться в живых. Пока его товарищи держали строй, воин должен был сражаться: конечно же, он мог быть убит при следующей атаке, но если бы он покинул поле боя, то его ждал бы позор и, возможно, наказание или даже смерть за трусость. Но вот последовала особо суровая атака. Видя, как кругом гибнут их товарищи, несколько солдат дрогнуло и побежало. Несколько стоящих рядом последовало их примеру.

Как только некоторое критическое число солдат покинуло поле боя, держать оборону перестало быть выгодным: риск быть убитым начал перевешивать возможное наказание за бегство. Тем более, что чем больше солдат покидало поле боя, тем меньше становилась вероятность того, что каждый отдельно взятый беглец будет наказан. Не прошло и нескольких минут, как все войско обратилось в бегство и погибло: пеший не имеет никаких шансов против преследующего его конного воина. Тем не менее решение каждого солдата бросить свой щит и попытаться добежать до видневшейся вдали лесной опушки было рациональным: если остальные бегут, то у отдельно взятого воина фактически нет выбора. Оставаясь сражаться, он обрекает себя на верную смерть. Пытаясь спастись, он с некоторой вероятностью остается в живых. Что произошло бы, если бы каждый воин был готов сражаться до конца, как личная дружина короля Гарольда (которая не отступила ни на шаг и была полностью уничтожена)? Возможно, никто бы не побежал и битва закончилась бы победой англосаксонцев. Но история не знает сослагательного наклонения.

Оглянитесь вокруг. Действия других людей практически всегда влияют на решения, которые нам приходится принимать. Почему в некоторых вузах студенты списывают на экзамене? Если списывают все остальные, то для каждого отдельно взятого студента выгода от списывания перевешивает ожидаемое наказание от поимки. В приличных вузах не списывает никто (или почти никто): попавшегося ждет показательное наказание, вплоть до отчисления. Как происходит обвал финансового рынка? По той же причине: если вы ожидаете, что цена акции упадет, то вам выгодно от нее избавиться. Если все начинают избавляться от этой акции, то ее цена падает, оправдывая ожидания. Конечно же, всегда можно рассуждать о «стадном инстинкте» и о стремлении людей имитировать друг друга, но очень часто массовая паника имеет рациональное (на индивидуальном уровне) объяснение.

Теория игр — раздел прикладной математики, с помощью которого ученые (в первую очередь экономисты и политологи) моделируют поведение нескольких субъектов, когда критерий принятия решения каждого зависит от решений, принимаемых остальными. Важнейший факт состоит в том, что решение игровой задачи часто отличается от решения оптимизационной задачи: войску короля Гарольда (да и самому королю) было бы «выгодно», если бы никто из солдат не побежал. Но в итоге решение каждый отдельный солдат принимал сам за себя.

1.1. СТАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ: ЧИСТЫЕ СТРАТЕГИИ

Существует несколько способов классифицировать игровые задачи. Различие между *статическими* и *динамическими* играми обусловлено возможностью игроков наблюдать за действиями друг друга и реагировать на них. В статических играх игроки принимают решения одновременно; принятые решения не подлежат пересмотру. В динамических играх существует более сложный порядок ходов.

1.1.1. ИГРЫ В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

В детстве все играли в игру «камень-ножницы-бумага». Каждый из двух игроков выбрасывает одну из трех заглавных фигур. «Камень» побеждает «ножницы», «бумага» — «камень», «ножницы» — «бумагу». Победивший бьет щелбан проигравшему. Как можно математически описать эту игру?

Во-первых, нам известно, что игроков всего двое. Будем говорить, что *множество игроков* в этой игре состоит из двух элементов: $I = \{1, 2\}$.

Во-вторых, мы знаем, что каждый игрок может выбрать одну из трех стратегий. Таким образом, для каждого игрока $i \in I$ *множество стратегий* будет[1] $S_i = \{$«камень», «ножницы», «бумага»$\}$.

В-третьих, мы знаем, как выигрыши игроков зависят от тех стратегий, которые они выбрали. В нашей игре всего два игрока, причем у каждого игрока конечное число стратегий. Выигрыши игроков в такой игре можно представить в виде матрицы, каждая строка которой соответсвует одной стратегии 1-го игрока, каждый столбец — одной стратегии 2-го игрока. Каждая ячейка такой матрицы будет соответствовать одной из возможных ситуаций развития событий. Она будет содержать два числа: выигрыш 1-го игрока и выигрыш 2-го игрока. Если выигрыш от победы равен 1, выигрыш от поражения равен -1, а выигрыш от ничьей равен 0, то матрица выигрышей будет выглядеть так:

		Игрок 2		
		«камень»	«ножницы»	«бумага»
Игрок 1	«камень»	$0;\ 0$	$1; -1$	$-1;\ 1$
	«ножницы»	$-1;\ 1$	$0;\ 0$	$1; -1$
	«бумага»	$1; -1$	$-1;\ 1$	$0;\ 0$

Эта матрица задает нам *функции выигрышей* игроков — т.е. то, как их выигрыши зависят от играемых стратегий.

Для того чтобы формально определить, что такое функция выигрышей (ее иногда также называют *функцией полезности*), введем следующее обозначение.

[1] «Камень-ножницы-бумага» — статическая игра: решая, какой ход делать, вы не знаете, что выбросит ваш противник. После того, как вы сделали свой ход, у вас нет возможности передумать, причем ваш противник находится в том же положении, что и вы. Примерами динамических игр являются карточная игра в «дурака», «крестики-нолики» или шахматы. Стратегия должна предписывать, какой ход надо делать в каждой из возможных игровых ситуаций. Стратегия, в таком случае, — это толстая книга, прочтя которую, доверенное вами лицо может играть в карты или шахматы так, как вы считаете нужным. Множество стратегий в такой игре — это все возможные способы написания таких книг. Более подробно о том, как решать такие игры, мы расскажем в следующей главе.

Определение 1.1. Пусть $S_1, \ldots, S_N$ — множества. *Декартовым произведением* этих множеств называется множество

$$S \equiv \prod_{i=1}^{N} S_i = \big\{(s_1, \ldots, s_N) \bigm| s_1 \in S_1, \ldots, s_N \in S_N\big\}.$$

Если $I = \{1, \ldots, N\}$ — множество игроков, $S_1, \ldots, S_N$ — множества стратегий игроков, то будем говорить, что *множество профилей стратегий*, или *множество стратегий в игре*, есть $S = \prod_{i=1}^{N} S_i$. Например, в нашей игре множество профилей стратегий будет $S = \{$(«камень», «камень»), («камень», «ножницы»),…,(«бумага», «бумага»)$\}$.

Любой элемент $s_i \in S_i$ называется *стратегией* игрока i, любой элемент $s \in S$ — *профилем стратегий* игроков. Обозначим через $S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j$ множество всех возможных профилей стратегий для всех игроков, кроме игрока i. Соответственно, $s_{-i} \in S_{-i}$ будет профилем стратегий всех игроков, кроме i.

Функция выигрыша игрока i будет присваивать каждому профилю стратегий $s \in S$ некоторый выигрыш $u_i \colon S \to \mathbb{R}$. Назовем функцию $u \colon S \to \mathbb{R}^N = (u_1, \ldots, u_N)$ *профилем функций выигрышей* игроков.

Теперь можно формально определить, что мы имеем в виду под игрой.

Определение 1.2. Набор $G = \langle I, S, u \rangle$ называется *игрой в нормальной форме*.

В игре каждый игрок i выбирает одну стратегию из множества стратегий S_i. Выигрыш каждого игрока зависит как от выбранной им стратегии, так и от стратегий, выбранных другими игроками. Цель анализа игры — понять, какие стратегии игроки выберут в зависимости от множества профилей стратегий S и профиля функций выигрышей u.

1.1.2. ДОМИНИРОВАНИЕ

Наша задача — составить прогноз поведения игроков в игре. Первое (и наиболее очевидное) рассуждение состоит в том, что ни один игрок не станет играть некоторую стратегию, если какая-то другая стратегия всегда приносит ему больший выигрыш.

Определение 1.3. Пусть $G = \langle I, S, u \rangle$ — игра в нормальной форме. Тогда для игрока i стратегия $s_i \in S_i$ *сильно доминирует* стратегию $s_i' \in S_i$, если для всех $s_{-i} \in S_{-i}$ выполнено

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}). \tag{1.1}$$

Стратегия $s_i \in S_i$ *слабо доминирует* стратегию $s_i' \in S_i$, если для всех $s_{-i} \in S_{-i}$ выполнено

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geqslant u_i(s_i', s_{-i}), \tag{1.2}$$

а хотя бы для одного $s_{-i} \in S_{-i}$ мы дополнительно имеем (1.1).

Если одна стратегия всегда приносит игроку больший выигрыш, чем другая, то мы говорим о сильном доминировании. Если у игрока есть одна стратегия, которая сильно или слабо доминирует все остальные, то мы можем ожидать, с большой долей уверенности, что он сыграет именно ее. Если такая стратегия есть у каждого игрока, то мы получили решение игры — прогноз относительно того, что сделает каждый игрок.

Определение 1.4. Набор стратегий $s^* \in S$ является *равновесием в сильно* (*слабо*) *доминирующих стратегиях*, если для всех i и всех $s'_i \in S_i$, $s'_i \neq s^*_i$, стратегия s^*_i сильно (слабо) доминирует s'_i.

Будем говорить, что стратегия является *доминируемой*, если ее доминирует какая-то другая стратегия.

Дилемма заключенного. Два бандита — Петя и Вася — попались милиции. Их подозревают в совершении ограбления. Следователь предлагает каждому из них дать показания против своего товарища. Никаких улик против них нет: если никто из них не сознается, то каждый проведет в тюрьме всего один год за незаконное хранение оружия. Петя и Вася сидят в разных камерах и лишены возможности общаться друг с другом. Если один из них даст показания, а другой промолчит, то промолчавший проведет в тюрьме десять лет, а расколовшийся выйдет на свободу. Если оба расколятся, то каждый получит по восемь лет. Формально, мы имеем $I = \{$Петя, Вася$\}$, $S_1 = S_2 = \{$«сознаться», «молчать»$\}$. Пусть выигрыш каждого равен, со знаком минус, годам, проведенным за решеткой:

		Вася	
		«молчать»	«сознаться»
Петя	«молчать»	$-1;\ -1$	$-10;\ 0$
	«сознаться»	$0; -10$	$-8; -8$

Как же поведут себя Петя и Вася? Каждому выгодно сознаться, вне зависимости от того, что сделает другой. Допустим, что Васе стало известно, что Петя промолчит. Если Вася сознается, он проведет в тюрьме 0 лет; если промолчит, то один год. Следовательно, если Петя будет молчать, то Вася расколется. Теперь предположим, что Вася знает, что Петя решил расколоться. Васе все равно выгодно сознаться (так он получит 8 лет вместо 10). Следовательно, вне зависимости от того, что сделает Петя, Вася сознается. Поскольку выигрыши симметричны, Петя тоже сознается: профиль стратегий («сознаться», «сознаться») является равновесием в сильно доминирующих стратегиях.

Эффективность по Парето. Заметим, что исход «дилеммы заключенного» (8 лет тюрьмы каждому) не является наилучшим: если бы Петя и Вася сыграли стратегии $s =$ («молчать», «молчать»), то каждому из них было бы строго лучше. Это — следствие того, что мы анализируем игровую, а не оптимизационную задачу. Петя и Вася принимают решения по отдельности; если бы за них обоих решал кто-то один, максимизирующий суммарный выигрыш Пети и Васи, то он бы действительно выбрал $s =$ («молчать», «молчать»). Однако в реальности каждый решает сам за себя.

Можем ли мы сказать, какой из двух профилей стратегии является более хорошим? Наиболее строгий критерий имеет следующее формальное определение.

Определение 1.5. Пусть $G = \langle I, S, u\rangle$ — игра, стратегии $s, s' \in S$. Будем говорить, что профиль стратегий s *Парето-доминирует* s', если для всех $i \in I$

$$u_i(s) \geqslant u_i(s'), \tag{1.3}$$

причем как минимум для одного i это неравенство выполняется строго.

Профиль стратегий s^o является *Парето-эффективным* или *оптимальным по Парето*, если не существует стратегии $s' \in S$, которая Парето-доминирует стратегию s^o.

Следуя этому определению, мы будем считать, что первый профиль стратегий лучше второго, если все без исключения игроки согласны с тем, что первый профиль стратегий не хуже, причем по крайней мере один игрок считает, что первый профиль стратегий лучше. В игре «дилемма заключенного» единственный профиль стратегий, который не является Парето-эффективным — это равновесные стратегии («сознаться», «сознаться»). В этом отражена суровая правда жизни. Поведение игроков в самых разных ситуациях очень часто оставляет желать лучшего. Случается так, что существует вариант действий, который увеличил бы благосостояние всех без исключения игроков — но он не обязан являться равновесием. В итоге может показаться, что в плачевном для всех игроков исходе виновата какая-то невидимая сила, какой-то дополнительный игрок, о существовании которого мы можем только догадываться. Однако теория игр способна объяснять такие исходы, не прибегая к конспирологии. Парето-доминируемые равновесные исходы случаются, как бы это ни было печально.

Аукцион второй цены. Предположим, что на продажу выставлена ранее не известная картина великого художника Виктора Михайловича Васнецова. Два богатых человека — Владимир и Михаил — решили купить эту картину. Владимир оценивает картину в v_1 руб., Михаил — в v_2 руб. (т.е. по определению, v_1 и v_2 — максимальная сумма, которую каждый из них готов заплатить за картину). Аукцион происходит по следующей схеме. Сначала Владимир и Михаил присылают свои заявки в закрытых пакетах. Картину приобретает тот, кто предложит бо́льшую сумму денег, но платит он столько, сколько указано в проигравшей заявке. Для простоты предположим, что при совпадении заявок каждый покупатель выигрывает с вероятностью $1/2$. Таким образом, если s_1 — это заявка Владимира, а s_2 — заявка Михаила, то функция выигрышей Владимира выглядит следующим образом:

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} v_1 - s_2, & s_1 > s_2; \\ \dfrac{v_1 - s_1}{2}, & s_1 = s_2; \\ 0, & s_1 < s_2. \end{cases} \quad (1.4)$$

Докажем, что стратегия $s_1^* = v_1$ слабо доминирует все остальные. Нам надо перебрать все остальные стратегии $s_1' \in [0, \infty)$ и показать, что ни для одной $s_2 \in [0, \infty)$ мы не можем иметь $u_1(s_1', s_2) > u_1(s_1^*, s_2)$. Мы имеем

$$u_1(v_1, s_2) - u_1(s_1', s_2) = \begin{cases} 0, & s_1' > s_2; \\ \dfrac{v_1 - s_2}{2}, & s_1' = s_2; \\ v_1 - s_2, & s_1' < s_2, \end{cases} \quad (1.5)$$

при $s_2 \leqslant v_1$ и

$$u_1(v_1, s_2) - u_1(s_1', s_2) = \begin{cases} s_2 - v_1, & s_1' > s_2; \\ \dfrac{s_2 - v_1}{2}, & s_1' = s_2; \\ 0, & s_1' < s_2, \end{cases} \quad (1.6)$$

при $s_2 > v_1$. Обе эти величины неотрицательны. Следовательно, в аукционе второй цены слабо доминирующая стратегия состоит в том, чтобы назвать в качестве заявки свою истинную оценку.

Выборы — два кандидата. Пусть N (нечетное число) членов гаражного кооператива решают, за какую из двух кандидатур на должность председателя следует проголосовать. Председателем становится тот, кто получит больше половины голосов. Таким образом, $S_i = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}\}$ для всех i, где «A» означает отдать голос за кандидата A, «B» — за кандидата B. Пусть избиратель i получает выигрыш 1, если председателем становится первый кандидат, и 0, если председателем становится второй кандидат. Тогда стратегия $s_1 = \mathtt{A}$ слабо доминирует стратегию $s_1' = \mathtt{B}$. Действительно, пусть D_{A} — число голосов (кроме избирателя i), поданых за кандидата A (остальные $N - 1 - D_{\mathrm{A}}$ голосов отдаются за кандидата B). Пусть $u_i(s_i, D_{\mathrm{A}})$ — выигрыш избирателя i при голосовании за кандидата $s_i \in S_i$. Тогда мы получим

$$u_i(\mathtt{A}, D_{\mathrm{A}}) - u_i(\mathtt{B}, D_{\mathrm{A}}) = \begin{cases} 1, & D_{\mathrm{A}} = \dfrac{N-1}{2}; \\ 0, & D_{\mathrm{A}} \neq \dfrac{N-1}{2}. \end{cases} \quad (1.7)$$

Иными словами, голос избирателя имеет значение, только если остальные голоса разделились ровно пополам. В таком случае его голос будет решающим; если же за одного из кандидатов собираются голосовать более половины оставшихся избирателей, то голос избирателя не влияет на исход выборов (и, соответственно, его выигрыши при голосовании за кандидата A и кандидата B равны). Профиль стратегий «каждый голосует за своего любимого кандидата» является, таким образом, равновесием в слабо доминирующих стратегиях. При двух кандидатах *честное* поведение (когда каждый голосует за того, кто ему больше нравится) является рациональным, т.е. даже если избиратель знал бы, как проголосуют другие, он все равно проголосовал бы так же.

1.1.3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ УДАЛЕНИЕ ДОМИНИРУЕМЫХ СТРАТЕГИЙ

Если равновесие в сильно доминирующих стратегиях существует, то оно является весьма обоснованным прогнозом действий игроков. К сожалению, равновесие в сильно доминирующих стратегиях встречается далеко не во всех играх. Рассмотрим такую игру:

Игрок 2

Игрок 1		U	C	R
	U	1; 2	2; 1	1; 0
	L	0; 5	1; 2	7; 4
	D	−1; 1	3; 0	5; 2

В этой игре у игрока 1 нет доминирующих (и доминируемых) стратегий. Однако у игрока 2 стратегия `U` доминирует `C`. Следовательно, если игрок 2 рационален, то он не будет играть доминируемую стратегию `C`. Если игрок 1 знает, что игрок 2 рационален, то он может вообще не учитывать существование стратегии `C` у игрока 2. Следовательно, он может рассматривать следующую игру:

Игрок 2

Игрок 1		U	R
	U	1; 2	1; 0
	L	0; 5	7; 4
	D	−1; 1	5; 2

Если игрок 1 (а) рационален и (б) знает о том, что игрок 2 рационален, то он не будет играть доминируемую стратегию `D`. С точки зрения игрока 2 (если он рационален, верит в рациональность игрока 1, а также в то, что игрок 1 верит в рациональность игрока 2), матрица игры тогда выглядит так:

Игрок 2

Игрок 1		U	R
	U	1;2	1;0
	L	0;5	7;4

Тогда игрок 2 не станет играть доминируемую стратегию R (т.е. он всегда будет играть U). Правда, для этого он должен быть уверен в том, игрок 1 знает о его (игрока 2) рациональности. Если игрок 1 уверен, что игрок 2 не станет играть R, то игра приобретет следующий вид:

		Игрок 2
		U
Игрок 1	U	$1;2$
	L	$0;5$

Игроку 1 остается сыграть U — конечно же, при условии выполнения следующей итерации предположений о рациональности[2]. В итоге у нас есть прогноз: $s_1^* = \mathtt{U}$, $s_2^* = \mathtt{U}$.

Процедура, которую мы проделали в этом примере, называется *последовательным удалением доминируемых стратегий*. Дадим ей формальное описание.

Определение 1.6. Пусть $G^1, G^2, \ldots$ — последовательность игр, полученных следующим образом. Пусть S_i^n — множество стратегий игрока i в игре G^n, полученное путем удаления сильно доминируемых стратегий из множества S_i^{n-1} в игре $G^{n-1} = \langle I, S^{n-1}, u\rangle$. Пусть S_i^∞ — предел последовательности $S_i^1 \supseteq S_i^2 \supseteq \ldots$. Тогда игра *разрешима по доминированию*, если S_i^∞ состоит из одного элемента s_i^∞ для всех i. Набор $s^\infty = (s_1^\infty, \ldots, s_N^\infty)$ назовем *решением игры по доминированию*.

Мы предполагаем, что множества S_i^∞ существуют. При конечных множествах стратегий S_i это утверждение очевидно. Кроме того, если на каждом следующем этапе мы удаляем сильно доминируемые стратегии, то порядок их удаления не влияет на итоговый результат S^∞. Например, если на первом шаге мы удалим доминируемые стратегии игрока 1, а на втором шаге — доминируемые стратегии игрока 2, то от перемены порядка, в котором удаляются доминируемые стратегии игроков, результат не изменится (см. задачу 1.21). Мы получим тот же результат и в том случае, если на одном шаге удалим доминируемые стратегии сразу нескольких (или даже всех) игроков. Однако если мы удаляем не только сильно доминируемые, но и слабо доминируемые стратегии, то порядок удаления может быть важен (см. с. 21).

[2] Будем говорить, что в предельном случае рациональность является *всеобщим знанием*. Такое предположение является реалистичным, например, в том случае, когда игровое взаимодействие между несколькими субъектами повторяется много раз подряд. Если на протяжении нескольких ходов мои партнеры не играют доминируемые стратегии, то у меня есть основания полагать, что такое не произойдет и впредь. Если мои действия основаны на предположении о рациональности моих партнеров, то рано или поздно они это поймут, и т.д.

Решение игры по доминированию может не существовать: множества S_i^∞ могут содержать несколько элементов. Рассмотрим такую игру:

Игрок 2

Игрок 1	U	C	R
U	1; 0	2; 1	0; 0
L	0; −1	0; 0	2; 1
D	−1; 1	−1; 0	1; 2

Мы удаляем стратегию D у игрока 1, потому что она доминируется стратегией L. Далее мы удаляем стратегию U у игрока 2 (ибо она доминируется стратегией C, если игрок 1 не играет D) и остаемся с неразрешимой по доминированию игрой

Игрок 2

Игрок 1	C	R
U	2; 1	0; 0
L	0; 0	2; 1

Здесь мы имеем $S^\infty = \{\mathtt{U},\mathtt{L}\} \times \{\mathtt{C},\mathtt{R}\}$.

Битва на море Бисмарка. Вот классический жизненный пример использования удаления доминируемых стратегий. Во Второй мировой войне на Тихом океане сражались силы Соединенных Штатов и Японии. Японский генерал Имамура планировал атаковать американские позиции в Новой Гвинее; для этого ему было необходимо перебросить значительные сухопутные силы на Новую Гвинею. Существовали два возможных пути конвоя: южный (S) и северный (N). Американцы под командованием генерала Кенни собиралась не допустить японских подкреплений. Американцы не знали, какой путь выберут японцы; для того, чтобы уничтожить японский конвой, нужно было сначала обнаружить его с воздуха (из-за шторма обе стороны знали примерное время отправки конвоя). Таким образом, у Кенни тоже были две стратегии: искать конвой на севере (N) или на юге (S). От выбора обоих генералов зависело число дней, в течение которых американская авиация могла бомбить японский конвой. При этом северный маршрут был на один день короче южного. Эту ситуацию можно представить в виде следующей игры:

Кенни

Имамура	N	S
N	−2; 2	−1; 1
S	−2; 2	−3; 3

В этой игре ни у одного из игроков нет сильно доминируемых стратегий. Однако у генерала Имамуры есть слабо доминируемая стратегия: S. Она дает ему меньший выигрыш, чем N, при условии, если противник выбирает S, и равный выигрыш, если противник выбирает N. Следуя логике последовательного удаления доминируемых стратегий, Кенни должен был знать, что Имамура не станет играть стратегию S, и самому сыграть N. Так и произошло: Имамура выбрал северный путь, и довольно быстро был обнаружен. Японцы понесли большие потери и вторжение в Новую Гвинею не состоялось (хотя, вероятно, потери японцев были бы еще больше, если бы они выбрали южный путь).

Последовательное удаление слабо доминируемых стратегий. При последовательном удалении слабо доминируемых стратегий решение игры по доминированию может зависеть от порядка, в котором игроки удаляют свои стратегии. Пусть в игре с двумя игроками матрица выигрышей такова[3]:

		Игрок 2	
		L	R
Игрок 1	U	1; 1	0; 0
	M	1; 1	2; 1
	D	0; 0	2; 1

В этой игре у первого игрока стратегия M слабо доминирует U и D. Если сначала удалить U, то в игре с оставшимися стратегиями у второго игрока R будет слабо доминировать L. Удалив L, мы приходим к двум решениям — (M, R) и (D, R). Если же сначала удалить D, то на второй итерации мы удаляем R у второго игрока и приходим к решениям (M, L) и (U, L) с другим значениями выигрышей.

1.1.4. РАВНОВЕСИЕ НЭША

Рассмотрим пример на с. 20. Если игрок 1 знает, что игрок 2 собирается играть C, то ему следует сыграть U. Аналогично, если игроку 2 известно намерение игрока 1 сыграть U, то ему следует сыграть C. Таким образом, профиль стратегий $s^* = (\mathtt{U}, \mathtt{C})$ является равновесным: ни одному игроку не выгодно изменить свою стратегию при условии, что другой игрок не изменит свою. Формально, (U, C) отвечает следующему определению.

Определение 1.7. Пусть $G = \langle I, S, u \rangle$ — игра в нормальной форме. Тогда $s^* \in S$ — *равновесие Нэша*, если для всех i, для всех $s_i' \in S_i$, мы имеем

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geqslant u_i(s_i', s_{-i}^*). \tag{1.8}$$

Равновесие Нэша — это такой профиль стратегий, что ни один отдельно взятый игрок не захочет изменить свою стратегию, если стратегии оставшихся игроков останутся неизменными. Равновесие Нэша является основной концепцией решения теоретико-игровых задач в общественных

[3] [Печерский, Беляева, 2001, с. 43].

науках. Почему? Видимо, из-за того, что оно удовлетворяет определенному минимальному набору представлений о рациональности игроков. Нобелевский лауреат Роджер Майерсон так обосновал важность равновесия:

> Когда меня спрашивают, почему в какой-то игре игроки должны вести себя, как в равновесии Нэша, я отвечаю: «Почему нет?» Далее я предлагаю задавшему вопрос сформулировать свое представление о том, как должны повести себя игроки. Если эта спецификация не является равновесием Нэша, то … она будет противоречить сама себе, если мы предположим, что игроки имеют верное представление о действиях друг друга. [Myerson, 1991, p. 106].

Иными словами, равновесие Нэша является необходимым условием «разумного» поведения игроков. Является ли это условие достаточным? То есть существуют ли игры, в которых профили стратегий, формально удовлетворяющие условиям равновесия Нэша, не могут являться разумными (с интуитивной точки зрения) прогнозами поведения игроков? К сожалению, да. Во многих динамических играх (как мы увидим в следующих главах) нам могут потребоваться более строгие условия для составления прогноза поведения игроков. Тем не менее все равно любой такой прогноз будет являться равновесием Нэша.

Координационные игры. Два студента, Маша и Андрей, договорились пойти в Малый театр. Билеты куплены, и за час до встречи они садятся в метро в разных районах города Москвы. Театр находится на станции метро «Площадь революции». К сожалению, они забыли договориться, где встречаться: в метро или у входа в театр. Телефонов у них нет. Что они будут делать? У каждого два варианта действий: ждать в метро или у театра. Если они пойдут в разные места, то опоздают на спектакль. Матрица игры для них выглядит так:

		Андрей	
		M	T
Маша	M	1; 1	0; 0
	T	0; 0	1; 1

В этой игре два равновесия: $(\mathtt{M},\mathtt{M})$ и $(\mathtt{T},\mathtt{T})$, причем ни у одного из игроков нет доминирующих стратегий. Это — классический пример *координационной игры*.

Можно ли сказать, какое из нескольких возможных равновесий будет реализовано в координационной игре? Важную роль играет коммуникация между игроками. Если перед тем, как выйти из дома, Андрей передал Маше, что будет ждать ее в метро, то, скорее всего будет реализована пара стратегий $(\mathtt{M},\mathtt{M})$ — несмотря на то что сообщение Андрея не является обязательным к исполнению и никто не мешает Маше прийти к театру.

При отсутствии коммуникаций важную роль играет культурный и психологический контекст игры, не отраженный в функциях выигрышей игроков. Представьте себе следующий пример. Вы и ваш товарищ — десантники, заброшенные во вражеский тыл. Вы приземлились в разных местах; для успешного проведения операции вам необходимо встретиться. Ни у одного из вас нет рации. Однако у каждого есть карта местности — такая как на рис. 1.1. Куда вы пойдете в надежде встретить своего товарища? Для большинства ответ очевиден: мост через речку. Почему? Потому что это место наиболее очевидно. Эта очевидность никак не отражена в функциях выигрышей: если вы встретитесь в любом другом месте, то ваш выигрыш будет таким же. Если вы разминетесь, то вы проиграете — вне зависимости от того, куда вы в итоге пришли.

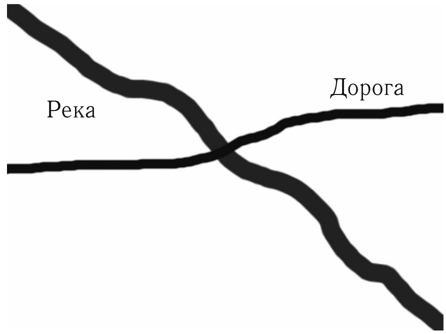


Рис. 1.1. Карта вражеской местности

Стратегии, похожие на точку на пересечении дороги и реки на рис. 1.1, иногда называют *фокальными точками*. Важность таких стратегий в координационных играх описана в классической книге Томаса Шеллинга [1960]. Автор спрашивал своих студентов: если бы вам надо было встретиться в Нью-Йорке с незнакомым вам человеком (который находится в том же затруднительном положении, что и вы), то в какое место (и когда) бы вы пришли? Наиболее частый ответ был: в полдень на Times Square. Конечно же, наличие таких фокальных точек зависит от однородности культурной среды, из которой происходят игроки. Человек из другой страны, впервые попавший в Нью-Йорк, вряд ли пойдет искать своего товарища по игре на Times Square, так как не знает о символическом значении, которое может иметь это место для второго игрока.

В координационной игре на выбор равновесия могут влиять не только ментальные факторы, но и история предыдущих взаимодействий игроков. Если Маша и Андрей всегда встречались в метро на станции «Площадь революции» в центре зала, то и в следующий раз они встретятся там же. Андрей, предполагая, что Маша будет ждать его в метро, придет в метро. Маша, рассуждая схожим образом, сделает то же самое. Таким образом, координационная игра обладает свойством *зависимости от истории* или *зависимости от траектории*. Если данная игра повторялась несколько раз и в ней каждый раз реализовывалось одно и то же равновесие, то и в следующий раз, скорее всего, игроки сыграют те же стратегии [4].

[4] Такие многократные взаимодействия более полно описываются динамическими играми.

Реализация одного и того же равновесия в повторяющемся игровом взаимодействии может привести к формированию социальных конвенций. Масколлел, Уинстон и Грин приводят такой пример:

> Каждый день люди, идущие на работу [в центре Нью-Йорка], должны решать, по какой стороне тротуара следует идти. Со временем формируется конвенция, согласно которой люди идут по правой стороне тротуара. Эта конвенция поддерживается, так как любой индивид, отклонившийся [от конвенции] в одностороннем порядке, будет растоптан. Конечно же, в любой день *возможно*, что какой-нибудь индивид решит идти по левой стороне, рассчитывая на то, что все остальные вдруг решат, что конвенция изменилась. Тем не менее наиболее разумный прогноз — что пешеходы и дальше будут придерживаться равновесия «все идут по правой стороне». Заметим, что поведение, для того чтобы стать устойчивой конвенцией, должно являться равновесием Нэша. Иначе индивиды начнут отклоняться от конвенции, как только та будет сформирована [Масколлел, Уинстон, Грин, 1995, с. 249; перевод автора].

1.1.5. ФУНКЦИИ РЕАКЦИИ

Рассмотрим матричную игру, представленную на рис. 1.2.

В левой части рис. 1.2 показано, какие стратегии игрока 1 максимизируют его выигрыш при данной стратегии игрока 2. Например, если игрок 2 выбирает стратегию `a`, то выигрыш игрока 1 максимизируется при выборе им стратегии `C`. Фактически, для каждого значения s_2 мы определяем одно или несколько значений s_1, максимизирующих выигрыш игрока 1. Аналогично, правая часть таблицы показывает, какая стратегия игрока 2 максимизирует его выигрыш для данной стратегии игрока 1. Дадим определение.

Игрок 1

	a	b	c	d
A	1;1	4;2	$\boxed{4;3}$	2;5
B	0;2	1;1	3;2	0;0
C	$\boxed{3;4}$	$\boxed{5;6}$	2;0	4;1
D	2;2	1;1	3;5	$\boxed{5;0}$

Игрок 2

	a	b	c	d
A	1;1	4;2	4;3	$\boxed{2;5}$
B	$\boxed{0;2}$	1;1	$\boxed{3;2}$	0;0
C	3;4	$\boxed{5;6}$	2;0	4;1
D	2;2	1;1	$\boxed{3;5}$	5;0

Рис. 1.2. Наилучшие реакции для двух игроков

Определение 1.8. Функция реакции игрока i есть точечно-множественное отображение $\check{s}_i$ между множествами S_{-i} и S_i такое, что для всех $s_{-i} \in S_{-i}$ мы имеем

$$\check{s}_i(s_{-i}) = \Big\{ s_i \in S_i \;\Big|\; u_i(s_i, s_{-i}) = \max_{s'_i \in S_i} u_i(s'_i, s_{-i}) \Big\}.$$

В математике *точечно-множественное отображение* между множествами A и B означает правило, которое каждому элементу из множества A ставит в соответствие какое-то подмножество множества B. Функция реакции является точечно-множественным отображением, показывающим, какие стратегии игрока максимизируют его выигрыш в зависимости от профиля стратегий остальных игроков. Для профиля стратегий s_{-i} может существовать несколько стратегий игрока i, максимизирующих его выигрыш. Например, выигрыш игрока 2 при $s_1 = \mathtt{B}$ в описанной выше игре максимизируется при $s_2 \in \check{s}_2(\mathtt{B}) = \{\mathtt{a}, \mathtt{c}\}$.

Равновесие Нэша можно определить как любой такой профиль стратегий, в котором стратегия каждого игрока является наилучшей реакцией на стратегии остальных игроков:

Лемма 1.1. *Профиль стратегий s^* есть равновесие Нэша в том и только том случае, если для всех i мы имеем*

$$s_i^* \in \check{s}_i(s_{-i}^*). \tag{1.9}$$

Данную формулировку удобно использовать для решения некоторых задач по нахождению равновесия.

Дуополия Курно. Первой формальной задачей, исследованной с помощью нахождения равновесия, была модель конкуренции двух фирм, предложенная французским экономистом и математиком А.А. Курно в XIX в.

В стране N имеются две фирмы-производителя виджетов[5]. Обе фирмы должны решить, какое количество виджетов следует произвести в течение ближайшего месяца. Для простоты предположим, что виджеты делимы — можно произвести (и продать) любое дробное количество. Пусть $q_1 \in [0, \infty)$ — объем производства первой фирмы, $q_2 \in [0, \infty)$ — объем производства второй. Функция спроса на виджеты имеет вид $p = 1 - q_1 - q_2$, где p — максимальная цена, по которой удастся продать $q_1 + q_2$ штук в течение месяца. Предположим, что издержки производства у фирмы i равны $c_i q_i$, где $0 \leqslant c_i < 1$ — издержки изготовления одной единицы товара. Прибыль фирмы равна ее выручке за вычетом издержек производства:

$$\begin{aligned} u_1 &= q_1 p - c_1 q_1 = q_1(1 - q_1 - q_2) - c_1 q_1, \\ u_2 &= q_2 p - c_2 q_2 = q_2(1 - q_1 - q_2) - c_2 q_2. \end{aligned} \tag{1.10}$$

[5] В экономической литературе так обозначаются типовые изделия.

В этой задаче множество стратегий у каждой из двух фирм не является конечным: каждая фирма может выбрать любой неотрицательный объем производства. Функции выигрышей фирм являются непрерывными функциями от их стратегий. Если (q_1^*, q_2^*) — равновесие Нэша, то q_1^* должен максимизировать u_1 при $q_2 = q_2^*$, и наоборот. Решениями максимизационных задач фирм

$$\max_{q_1} u_1(q_1, q_2) \quad \text{и} \quad \max_{q_2} u_2(q_1, q_2) \tag{1.11}$$

будут соответственно

$$\check{q}_1(q_2) = \begin{cases} \dfrac{1-q_2-c_1}{2}, & q_2 < 1-c_1; \\ 0, & q_2 \geqslant 1-c_1; \end{cases} \quad \text{и} \quad \check{q}_2(q_1) = \begin{cases} \dfrac{1-q_1-c_2}{2}, & q_1 < 1-c_2; \\ 0, & q_1 \geqslant 1-c_2. \end{cases} \tag{1.12}$$

Уравнения (1.12) определяют функции реакции для первой и второй фирмы. Равновесие Нэша — это такие величины (q_1^*, q_2^*), при которых объем производства первой фирмы максимизирует ее прибыль при данном объеме производства второй фирмы, и наоборот. Следовательно, равновесием будет являться любое решение системы уравнений

$$\check{q}_1(q_2) = q_1, \qquad \check{q}_2(q_1) = q_2. \tag{1.13}$$

Графики функций реакции и равновесия для разных значений c_1 и c_2 представлены на рис. 1.3.

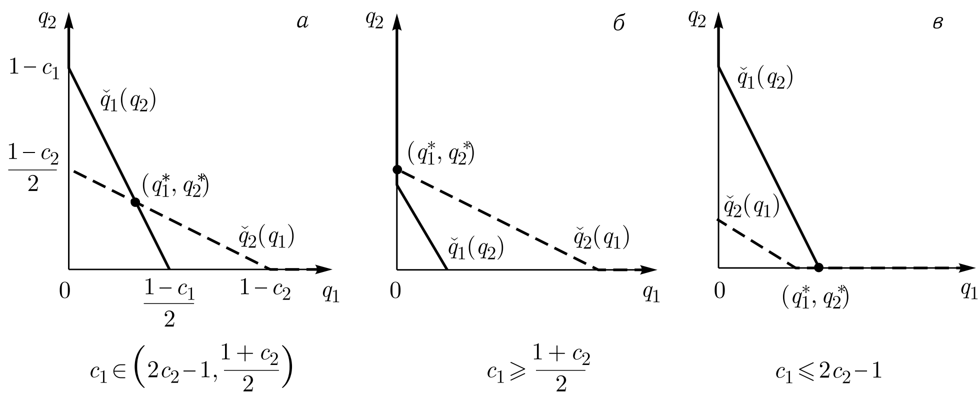


Рис. 1.3. Равновесие в модели дуополии Курно для разных значений c_1 и c_2

На каждом из трех рисунков сплошная линия изображает график функции реакции для фирмы 1, прерывистая линия — график функции реакции для фирмы 2. В точке пересечения этих графиков располагается равновесие.

Равновесие составит

$$q_1^* = \frac{1-2c_1+c_2}{3}, \quad q_2^* = \frac{1-2c_2+c_1}{3} \text{ для } c_1 \in \left(2c_2-1, \frac{1+c_2}{2}\right), \quad (1.14)$$

$$q_1^* = \frac{1-c_1}{2}, \quad q_2^* = 0 \text{ для } c_1 \leqslant 2c_2 - 1 \quad (1.15)$$

и

$$q_1^* = 0, \quad q_2^* = \frac{1-c_2}{2} \text{ для } c_1 \geqslant \frac{1+c_2}{2}. \quad (1.16)$$

1.1.6. РАВНОВЕСИЕ НЭША И ДОМИНИРОВАНИЕ

Очевидно, что равновесие в доминирующих стратегиях обязательно является равновесием Нэша (но никак не наоборот).

Лемма 1.2. *Пусть $s^* \in S$ — равновесие в доминирующих стратегиях. Тогда s^* — равновесие Нэша.*

Действительно, доминирующая стратегия должна давать игроку наилучший выигрыш вне зависимости от того, какие стратегии выбирают остальные игроки. Равновесная (по Нэшу) стратегия удовлетворяет более слабому условию: она должна быть оптимальной при условии, что остальные игроки выбирают свои равновесные стратегии.

Может ли в равновесии играться доминируемая стратегия? Если это — сильно доминируемая стратегия, то нет:

Лемма 1.3. *Пусть s^* — равновесие Нэша. Тогда s^* не содержит сильно доминируемых стратегий.*

Игрок по определению не может в равновесии играть стратегию при существовании альтернативы, которая всегда — при любых стратегиях остальных игроков — дает больший выигрыш. Однако вполне может быть так, что слабо доминируемая стратегия является равновесной. Рассмотрим следующую игру:

		Игрок 2	
		L	R
Игрок 1	U	1; 1	0; 0
	M	1; 1	2; 1

В этой игре два равновесия: (U, L) и (M, R). В первом из них игрок 1 играет слабо доминируемую стратегию U.

Равновесие Нэша и множество S^∞ взаимосвязаны.

Во-первых, при последовательном удалении сильно доминируемых стратегий мы не можем удалить равновесную стратегию:

Лемма 1.4. *Пусть в игре $G = \langle I, S, u \rangle$ профиль стратегий $s^* \in S$ является равновесием Нэша. Тогда $s^* \in S^\infty$.*

Доказательство. Доказываем от противного. Пусть s^* — равновесие Нэша, не содержащееся в S^∞. Пусть равновесие s^* удаляется на шаге n. Пусть s_i^* — любая стратегия, удаляемая на этом шаге. Тогда существует стратегия $s_i' \in S_i^n$, такая, что для всех $s_{-i} \in S_{-i}^n$ мы имеем

$$u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i^*, s_{-i}). \tag{1.17}$$

Но это противоречит утверждению, что s^* — равновесие:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geqslant u_i(s_i, s_{-i}^*) \tag{1.18}$$

для всех $s_i \in S_i$, ибо по построению s_i^* удаляется первой из стратегий игроков, входящих в равновесие, т.е. $s_{-i}^* \in S_{-i}^n$. ■

Во-вторых, если у игры есть решение по доминированию, то оно обязано быть равновесием Нэша (из предыдущей леммы должно следовать то, что это равновесие — единственное). Верен следующий результат:

Лемма 1.5. *Пусть $G = \langle I, S, u \rangle$ — игра с конечным множеством профилей стратегий S. Пусть s^∞ — решение этой игры по доминированию. Тогда s^∞ — единственное равновесие Нэша.*

Доказательство. Докажем это утверждение для конечных игр. Пусть $S^\infty = \{s'\}$ — не равновесие Нэша. Тогда существуют $i \in I$ и $s_i \in S_i$, такие, что

$$u_i(s_i, s_{-i}') > u_i(s_i', s_{-i}'), \tag{1.19}$$

причем существует шаг n такой, что некоторый $s_i'' \in S_i^n$ строго доминирует s_i в игре G^n, т.е. для всех $s_{-i} \in S_{-i}^n$ мы имеем

$$u_i(s_i'', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}). \tag{1.20}$$

Так как $s_{-i}' \in S_{-i}^n$ для всех шагов n, получаем

$$u_i(s_i'', s_{-i}') > u_i(s_i, s_{-i}'). \tag{1.21}$$

Рассмотрим два случая:

1. $s_i'' = s_i'$. Тогда (1.19) противоречит (1.21).
2. $s_i'' \neq s_i'$. Тогда существует $m > n$ и стратегия $s_i''' \in S_i^m$, которая строго доминирует s_i'' в игре G^m. Заменим s_i'' на s_i''' в неравенствах (1.20) и (1.21). Если $s_i''' = s_i'$, то утверждение доказано. Если $s_i''' \neq s_i'$, то повторим шаг (2).

Так как множества S_i конечны, то мы таким образом в конце концов придем к противоречию. ■

Какова ценность доказанных выше лемм? И множество равновесий Нэша, и множество S^∞ являются *концепциями решений* — т.е. способами выделить из множества стратегий S некоторые подмножества (желательно, состоящие из небольшого числа элементов), которые будут являться прогнозами действий игроков. Мы показали, что эти две концепции решений взаимосвязаны: равновесная по Нэшу стратегия не может быть удалена как сильно доминируемая, в то время как единственность решения по доминированию гарантирует существование (и единственность) равновесия Нэша.

1.1.7. ПРИМЕРЫ

«Лобовая атака». В игре с несколькими равновесиями выбор стратегий может быть обусловлен историей поведения игроков в подобных игровых взаимодействиях — друг с другом или с другими игроками.

Два автомобиля едут навстречу друг другу. Каждый водитель решает, свернуть ему или нет. Если один водитель свернул (T), а второй — нет (N), то свернувший водитель считается трусом, а не свернувший — крутым и заслуживающим уважения парнем. Если свернули оба, то каждый остается «при своих». Если не свернул ни один из них, то происходит столкновение и оба водителя погибают. Предпочтения каждого водителя (в порядке убывания выигрышей) выглядят так: стать крутым, остаться «при своих», стать трусом, погибнуть. Эти предпочтения могут быть выражены, например, такой функцией выигрышей:

		Игрок 1	
		T	N
Игрок 2	T	0; 0	−5; 10
	N	10; −5	−10; −10

В этой игре два равновесия: (T, N) и (N, T).

Какое из двух равновесий будет реализовано? Возможно, ответ зависит от репутации каждого из игроков. Если про первого игрока известно, что в прошлых игровых взаимодействиях он никогда не сворачивал, а второй игрок не имеет такой репутации, то следует ожидать, что второй игрок свернет, а первый — нет. В таких играх с несимметричными равновесиями репутация будет самоподдерживаться от одной игры к другой.

Дележ ста рублей. Представления игроков о равенстве и справедливости тоже могут иметь значение при определении равновесия. Рассмотрим, например, следующую игру.

В копилке лежат 100 руб. Каждый из двух игроков называет сумму, которую он хотел бы забрать из копилки. Если сумма заявок не превосходит 100 руб., то их заявки исполняются. Если в сумме было заявлено более 100 руб., то каждый получает нуль. Формально, $s_1 = s_2 = [0, 100]$,

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} s_1, & s_1 + s_2 \leqslant 100; \\ 0, & s_1 + s_2 > 100; \end{cases} \qquad u_2(s_1, s_2) = \begin{cases} s_2, & s_1 + s_2 \leqslant 100; \\ 0, & s_1 + s_2 > 100. \end{cases} \tag{1.22}$$

В этой игре существует *континуум*[6] равновесий. Любое равновесие имеет вид $(s_1^*, s_2^*) = (s, 100-s)$ при $s \in [0, 100]$.

Если два незнакомых человека сядут играть в эту игру, то какими будут их стратегии? Вероятнее всего, они предложат $(s_1, s_2) = (50, 50)$. Это — одно из многих равновесий, но оно наиболее очевидно и является фокальной точкой в силу своей симметричности. Какое-нибудь другое, несимметричное равновесие, например, $(s_1, s_2) = (30, 70)$, может быть реализовано, только если у каждого игрока есть основание полагать, что другой игрок будет придерживаться именно этой равновесной стратегии.

Банковская паника. Вот еще один пример, взятый из книги Гиббонса [Gibbons, 1992]. Каждый из двух вкладчиков имеет D долларов на счете в банке. Банк использовал эти средства для того, чтобы профинансировать некий инвестиционный проект продолжительностью два года. Если банк попытается отозвать средства через год после начала проекта, то сможет вернуть $2r$, где $D > r > D/2$. Если банк дожидается окончания проекта, то получает $2R$, где $R > D$. Через один год каждый из двух вкладчиков решает, забрать ли ему свой вклад из банка (W) или нет (H). Если хотя бы один вкладчик забирает вклад, то банк вынужден прекратить финансирование проекта. Забравший свои средства вкладчик получает сумму D, другой вкладчик получает $2r - D$. Если оба вкладчика забрали средства, то каждый получает r. Если оба вкладчика не забрали свои средства, то проект успешно реализуется и каждый получает по R. Матрица выигрышей в этой игре такая:

		2 вкладчик	
		H	W
1 вкладчик	H	$R;\quad R$	$2r-D;\ D$
	W	$D;\ 2r-D$	$r;\ r$

В этой игре существуют два равновесия: (H, H), в котором оба вкладчика дожидаются окончания проекта, и (W, W), в котором оба вкладчика забирают свои средства раньше срока, реализуя сценарий банковской паники.

Списывание на экзамене. N студентов пишут экзамен по теории игр. Каждый студент i имеет возможность списать ($s_i = 1$) или не списывать ($s_i = 0$). Все списывающие студенты будут наказаны. Однако тяжесть наказания, понесенная списывающим студентом, будет обратно пропорциональна числу списывающих. Так, например, если на списывании попался только

[6] *Континуумом* в математике называется множество чисел, содержащее все значения в каком-нибудь отрезке $[a, b]$, где $a < b$. Например, отрезок $[0, 1]$ является континуумом: он содержит все числа от 0 до 1. Множество $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$, с другой стороны, континуумом не является, хотя и содержит бесконечное число элементов.

один студент, то он может быть отчислен. Если на списывании попалась половина потока, то наказание для каждого студента будет более легким: по административным причинам, преподавателю будет трудно отчислить всех нарушителей. Пусть выигрыш студента i будет

$$U_i(s) = \begin{cases} 1 - \dfrac{C}{\sum_{j=1}^{N} s_j}, & s_i = 1; \\ 0, & s_i = 0. \end{cases} \tag{1.23}$$

Здесь чистый выигрыш от списывания равен 1; суммарный объем наказания составляет C. Найдем равновесия в этой игре. Функция реакции студента i будет

$$\check{s}_i(s_{-i}) = \begin{cases} 0, & \sum_{j\neq i} s_j < C - 1; \\ \{0, 1\}, & \sum_{j\neq i} s_j = C - 1; \\ 1, & \sum_{j\neq i} s_j > C - 1. \end{cases} \tag{1.24}$$

Легко убедиться, что в этой игре, в зависимости от значения параметра C, может быть несколько равновесий:

Случай 1: $C < 1$. Существует одно равновесие: все списывают.

Случай 2: $1 \leqslant C \leqslant N$. Существуют два равновесия: никто не списывает и все списывают.

Случай 3: $C > N$. Существует одно равновесие: никто не списывает.

Получается, что списывание может быть вызвано не институциональными причинами (такими как тяжестью наказания C, числом студентов N или их отношением к списыванию), а ожиданиями студентов относительно действий их товарищей. Если студент считает, что его товарищи списывать не будут, то его выигрыш от списывания будет меньше, чем тяжесть наказания, которую он понесет. Следовательно, он не станет списывать. Если у остальных студентов имеются такие же прогнозы относительно действий своих товарищей, то списывать не будет никто. Однако если же студент ожидает, что все остальные будут списывать, то ему будет выгодно списать: наказание будет достаточно легким по сравнению с выигрышем. Оба равновесия являются в своем роде фокальными точками — т.е. в каждом из них все игроки действуют одинаково. В таком случае уместно говорить о *самосбывающихся прогнозах*.

Несуществование равновесия в игре «инспекция». На железнодорожной платформе в электричку заходят двое: безбилетник и контролер. Если они заходят в один и тот же вагон, то контролер ловит безбилетника и штрафует его на 100 руб. Если они садятся в разные вагоны, то безбилетник выходит на следующей станции, ничего не заплатив. Свое моральное удовлетворение от поимки безбилетника контролер оценивает в 50 руб. Предположим, для простоты, что электричка состоит всего из двух вагонов. Тогда матрица выигрышей имеет следующий вид:

		Контролер	
		1 вагон	2 вагон
Безбилетник	1 вагон	-100; 50	0; 0
	2 вагон	0; 0	-100; 50

Эта игра не имеет равновесия Нэша. Если безбилетник едет в 1-м вагоне, то проводник максимизирует свой выигрыш, если сядет в 1-й вагон. Если же безбилетник знает, что проводник едет в 1-м вагоне, то сам переберется во 2-й.

Массовые протесты. В конце декабря 2010 г. в Тунисе, арабском государстве в Северной Африке, вспыхнули массовые протесты. Менее чем через месяц президент Бен Али, пробывший у власти 23 года, был вынужден бежать из страны. Так началась «Арабская весна» — волна революций на Ближнем Востоке, приведшая к смене власти в нескольких странах и гражданским войнам в нескольких других. Почему протесты возникают так внезапно — ведь казалось, что политический режим в Тунисе и других странах устойчив, как никогда, народ пассивен и не заинтересован в политике, а гражданское общество сла́бо и не развито?

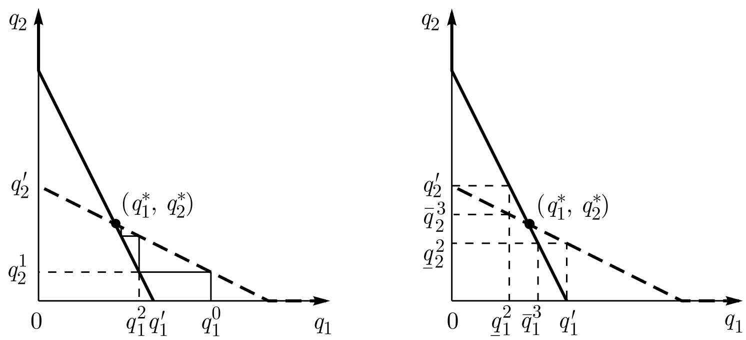
Попробуем объяснить происходящее при помощи теоретико-игровой модели. Предположим, что в некотором городе живет N жителей; каждый из них должен принять решение, принять или не принять участие в намеченной на следующий день массовой протестной акции. Предположим, что на решение каждого отдельно взятого человека участвовать или не участвовать в публичной акции, влияет его оценка возможной массовости этого мероприятия. Действительно, не так много людей способно выступать открыто, в одиночку и без оглядки на последствия — как в 1968 г. это сделала небольшая группа советских диссидентов, вышедших на Красную площадь в знак протеста против вторжения советских войск в Чехословакию. Однако участвовать в крупной акции готово большее число людей: это не так страшно из-за небольшой вероятности быть репрессированным и просто более комфортно психологически.

Предположим, что выигрыш жителя i от участия в акции протеста равен 1, если совокупное число участников акции равно или превосходит K_i, и нулю, если число участников меньше, чем K_i. Пусть выигрыш от неучастия равен $c \in (0, 1)$.

Легко подобрать такие параметры K_i, при которых равновесий в этой игре будет несколько. Пусть, например, $N = 5$, $K_1 = 1$, $K_2 = K_3 = 3$, $K_4 = K_5 = 5$. В таком случае у нас есть три равновесия. В первом из них в протестах участвует один человек, во втором — трое, в третьем — пятеро.

Из такой логики следует то, что крупные протесты скорее всего будут происходить в больших городах, причем чем крупнее город, тем больше населения города будет принимать участие в акциях протеста. Согласно нашим предположениям, на решение отдельно взятого человека выйти на улицу влияет абсолютное число единомышленников, а оно будет выше в большом городе. Поэтому в крупных городах протесты, как правило, более масштабны — даже в процентном соотношении. Высокий риск возникновения массовых гражданских акций в густонаселенных городах — это фактор, существенно влияющий на ход мировой истории. Государства переносили столицы из крупных городов на новые места (Турция — в 1924 г., Бразилия — в 1960 г., Казахстан — в 1997 г.); есть свидетельства того, что в странах с авторитарными режимами высокая концентрация населения оказывает положительное влияние на качество государственного управления. Возможно, это происходит в силу того, что в таких странах правителям приходится действовать осторожнее и лучше учитывать интересы населения, по крайней мере, жителей столиц.

Последовательное удаление доминируемых стратегий в дуополии Курно. Вернемся к задаче конкуренции двух фирм на с. 25. Данный пример показывает, как может выглядеть динамика поиска равновесия двумя фирмами. Например, предположим, что фирмы взаимодействуют друг с другом в течение нескольких периодов; в четные периоды возможность изменить объем производства имеет фирма 1; в нечетные периоды — фирма 2. Пусть $c_1 = c_2$. Если в момент времени $t = 0$ фирма 1 произведет объем товара q_1^0, то в момент времени $t = 1$ фирма 2 произведет $q_2^1 = \check{q}_2(q_1^0)$, в момент времени $t = 2$ фирма 1 произведет $q_1^2 = \check{q}_1(q_2^1)$, и т. д. (рис. 1.4, *а*). Последовательности объемов производств $q_1^0, q_1^2, \ldots$ и $q_2^1, q_2^3, \ldots$ сойдутся к q_1^* и q_2^* при любом начальном значении q_1^0. Таким образом, равновесие (q_1^*, q_2^*) будет устойчивым — если один из игроков отклонится от своей равновесной стратегии, то поведение игроков довольно быстро вернется к равновесию (доказать это предлагается в качестве отдельной задачи).



а) Существование равновесия и его устойчивость

б) Удаление доминируемых стратегий

Рис. 1.4. Дуополия Курно

На примере дуополии Курно можно проиллюстрировать процедуру последовательного удаления доминируемых стратегий. Предположим, что у фирмы 2 множество стратегий $S_2^t = [\underline{q}_2, \overline{q}_2]$. Какие стратегии для первой фирмы будут доминируемы? Во-первых, заметим, что если $q_2 \in [\underline{q}_2, \overline{q}_2]$ и $q_1 > \check{q}_1(\underline{q}_2)$, то $u_1(q_1, q_2) < u_1(\check{q}_1(\underline{q}_2), q_2)$. То есть $q_1(\underline{q}_2)$ сильно доминирует все стратегии $q_1 > \check{q}_1(\underline{q}_2)$. Во-вторых, $\check{q}_1(\overline{q}_2)$ доминирует все стратегии $q_1 < \check{q}_1(\overline{q}_2)$.

Попробуем для данной задачи построить последовательность множеств стратегий в соответствии с определением 1.6. Возьмем $S_1^0 = S_2^0 = [0, \infty)$. Стратегия $q_1' = \check{q}_1(0)$ доминирует все $q > q_1'$. Следовательно, $S_1^1 = [0, q_1']$. Аналогично, $S_2^1 = [0, q_2']$. На следующей итерации получим $S_1^2 = [\check{q}_1(q_2'), q_1']$, $S_2^2 = [\check{q}_2(q_1'), q_2']$. Мы получаем последовательность множеств стратегий $S_1^t = [\underline{q}_1^t, \overline{q}_1^t]$, $S_2^t = [\underline{q}_2^t, \overline{q}_2^t]$, где

$$\underline{q}_2^{t+1} = \check{q}_2(\overline{q}_1^t), \quad \overline{q}_1^{t+1} = \overline{q}_1^t, \quad \underline{q}_1^{t+1} = \check{q}_1(\overline{q}_2^t), \quad \overline{q}_2^{t+1} = \overline{q}_2^t \quad \text{для четных } t \geqslant 2 \tag{1.25}$$

и

$$\underline{q}_1^{t+1} = \underline{q}_1^t, \quad \overline{q}_2^{t+1} = \check{q}_2(\underline{q}_1^t), \quad \underline{q}_2^{t+1} = \underline{q}_2^t, \quad \overline{q}_1^{t+1} = \check{q}_1(\underline{q}_2^t) \quad \text{для нечетных } t \tag{1.26}$$

при начальных значениях $\underline{q}_1^1 = \underline{q}_2^1 = 0$, $\overline{q}_1^1 = q_1'$ и $\overline{q}_2^1 = q_2'$. Заметим, что для $i = 1, 2$ выполнено $\underline{q}_i^t \leqslant \underline{q}_i^{t+1}$, $\overline{q}_i^t \geqslant \overline{q}_i^{t+1}$ для всех $t \geqslant 0$. При этом можно показать, что последовательности $\underline{q}_i^t$ и $\overline{q}_i^t$ сходятся к q_i^*. Получается результат, соответствующий лемме 1.5. Для каждой фирмы $i = 1, 2$ существует единственная стратегия q_i^*, которая содержится во всех множествах S_i^t. Отличие от конечной игры состоит в том, что сходимость множеств стратегий к q_i^* происходит только в пределе, в то время как для конечной игры множество S^∞ достигается за конечное число итераций[7].

Выборы — несколько кандидатов. Вернемся к задаче голосования, описанной на с. 17. Нахождение равновесия значительно усложняется, если кандидатов будет три или больше. Предположим, что на должность претендуют всего K кандидатов. При определении победителя действует правило простого большинства: кандидат, набравший большинство голосов, объявляется победителем. Если несколько кандидатов набрали максимальное число голосов, то каждый из этих кандидатов с равной вероятностью объявляется победителем. Каким условиям должны отвечать равновесные стратегии? Рассмотрим избирателя i.

[7] Следует сказать, что описанная в этом примере сходимость не имеет места при произвольной функции спроса $p(q_1, q_1)$. Это верно для линейных функций (в том числе и для нашей $p = 1 - q_1 - q_2$), но для других функций спроса это может быть не так. См., например, учебник: [Бусыгин и др., 2000, с. 94–97].

Пусть $D_1^i, \ldots, D_K^i$ — число голосов всех избирателей, за исключением избирателя i, поданое за кандидатов $1, \ldots, K$. Пусть $M^i = \max\{D_1^i, \ldots, D_K^i\}$, $K_1^i = \{k\colon |D_k^i| = M^i\}$, $K_2^i = \{k\colon |D_k^i| = M^i - 1\}$. То есть M^i — это максимальное число голосов, отданное за какого-то кандидата, K_1^i — все кандидаты, которые набирают это число голосов, K_2^i — все кандидаты, набирающие на голос меньше (это множество может быть пустым). Избиратель i может повлиять на исход выборов в двух случаях. Во-первых, если K_1^i содержит не менее двух кандидатов и если i голосует за кандидата $k_1 \in K_1$, то кандидат k_1 побеждает с вероятностью 1. Во-вторых, если множество K_2^i не пустое, и избиратель i голосует за кандидата $k_2 \in K_2^i$, то кандидат k_2 побеждает с вероятностью $\dfrac{1}{|K_1^i| + 1}$. Если множество K_1^i состоит из одного элемента и множество K_2^i пусто, то *любое* действие избирателя i будет равнозначным по результату! Например, если избирателей больше трех и все голосуют за одного кандидата, то ни один их них не может изменить свой выигрыш, проголосовав за другого.

Если кандидатов трое или больше, то стратегия «голосовать за наиболее предпочтительного кандидата» уже не будет слабо доминировать другие стратегии. Пусть, например, кандидатов трое, и у избирателя i следующие предпочтения: он получает 3 ед. полезности, если выбирают кандидата 1; 2 ед. полезности, если выбирают кандидата 2; и 1 ед., если выбирают кандидата 3. Если $D_1^i = 0$ и $D_2^i = D_3^i \geqslant 2$, то избирателю i следует проголосовать за кандидата 2. Этот избиратель вынужден голосовать *стратегически*, т.е. не за ту альтернативу, которая является наилучшей с его точки зрения. Неудивительно, что на выборах, в которых участвуют несколько кандидатов или партий, очень важную роль играют прогнозы — т.е. информация, которая доступна избирателю о стратегиях, которые могут быть выбраны другими избирателями.

Это свидетельствует о том, что на выборах, в которых участвуют несколько кандидатов или партий, очень важную роль играют прогнозы — т.е. информация, которая доступна избирателю о стратегиях, которые могут быть выбраны другими избирателями.

Недопроизводство общественных благ. К числу общественных благ относятся бесплатные дороги, свет, произведенный уличными фонарями, национальная оборона, радиоэфир, знания и правовая система, обеспечивающая всем гражданам низкие издержки при заключении контрактов. Все эти вещи отличают два свойства. Во-первых, они являются *неисключаемыми*: никто не может запретить мне пользоваться светом от уличного фонаря; в то же самое время, для того, чтобы пользоваться автомобилем, мне необходимо сначала его купить. Во-вторых, общественные блага отвечают свойству *неистощаемости*. Автомобилем не могут одновременно пользоваться несколько человек; в то время как сразу несколько человек могут, не мешая друг другу, слушать одну и ту же радиопередачу; затраты на национальную оборону почти не зависят от числа граждан, которых необходимо оборонять. Иными словами, предельные издержки распространения общественного блага на еще одного потребителя равны нулю.

Рассмотрим такую задачу производства общественных благ. В Австралии по соседству находятся два фермерских участка. Каждый фермер может поставить на своем участке пу́гало для отпугивания ворон и кроликов, грозящих уничтожить его посевы. Урожайность каждого участка зависит от наличия пугала как на этом, так и на соседнем участке. Пусть a — прибыль каждого фермера, если пугала стоят на обоих участках, $b < a$ — прибыль, если пугало стоит только на одном участке, 0 — прибыль, если пугал нет. Если стоимость установки пугала равна 100, то между фермерами может возникнуть такая игра:

		Фермер 2	
		Ставить	Не ставить
Фермер 1	Ставить	$a-100$; $a-100$	$b-100$; b
	Не ставить	b; $b-100$	0; 0

При $b < 100$, $a < b + 100$ и $a > 100$ мы имеем игру, аналогичную дилемме заключенного. Доминирующая стратегия у каждого фермера — не ставить пугало, но результат Парето-неэффективен: если оба фермера поставят пугала, то обоим будет лучше. Пугала в этой игре являются общественными благами, так как от того, что один из фермеров поставил пугало, выигрывает и другой. Другому фермеру может захотеться стать «зайцем» — бесплатно воспользоваться общественным благом, производимым соседом, не производя самому[8].

Проблемы неэффективности равновесия не существовало бы, если бы фермеры могли принимать решения коллективно — т.е. если можно было бы заставить каждого фермера не отклоняться от принятого коллективного решения ставить пугало. Существование общественных благ, требующих решения проблемы коллективных действий, есть одна из основных причин возникновения государств. Значительная часть государственных бюджетов

[8] Величина b отражает технологию производства общественных благ. Если $b = a$, то наличие пугала хотя бы на одном участке гарантирует урожай на обоих участках. Возможная аналогия — производство знаний, например, если две фирмы разрабатывают новую технологию производства виджетов или если два ученых независимо друг от друга доказывают одну и ту же теорему. Если $b = a/2$, то мы говорим о линейной технологии, когда каждая дополнительная единица произведенного общественного блага увеличивает выигрыш игроков на одинаковую величину. Наконец, если $b = 0$, то мы имеем технологию «слабое звено», когда производство общественного блага невозможно без участия всех заинтересованных сторон.

большинства стран тратится именно на производство общественных благ [Мюллер, 2007, гл. 2–3; Hindricks, Myles, 2006, ch. 5].

Нормы поведения. Давным-давно, в далекой-далекой губернии, среди бескрайних глухих лесов, вдали от дорог и другого человеческого жилья стояла деревня Гадюкино. А времена были страшные, не то, что сейчас. По лесам и по дорогам шастали банды разбойников — лихих людей, зарабатывавших себе на жизнь грабежом и насилием. И вот, в Гадюкино пришла беда. Несколько разбойников зашли в деревню в надежде поживиться чем-нибудь. В деревне стояли всего два дома, их хозяев звали Петр и Фома. Когда пришли нехорошие люди, каждый хозяин сидел у себя дома. Что делать Петру и Фоме? Если они оба выйдут разбираться с бандитами, то у них должно хватить сил прогнать непрошенных гостей. Если выйдет кто-то один, то его убьют, а его дом разграбят (зато дом другого останется нетронутым). Если оба останутся сидеть дома, то бандиты сначала разграбят дом Петра, а потом примутся за Фому. Бандиты знали, что функции полезностей у двух деревенских жителей дают им такую матрицу выигрышей:

		Фома	
		Сидеть дома	Выйти разбираться
Петр	Сидеть дома	1; 1	4; 0
	Выйти разбираться	0; 4	3; 3

Получается, что Петр и Фома стоят перед дилеммой заключенного, и будут вынуждены остаться дома и дать себя ограбить. Таков и был расчет бандитов — как этих, так и всех других преступников и до, и после. Те, за чей счет живут преступники, могут быть сильны и многочисленны, но часто бывают неспособны организованно противостоять чужому произволу.

Однако на этот раз бандиты ошиблись. Отец Петра всегда учил своего сына, что стыдно и нехорошо оставлять своего друга в беде. «Умирай, а товарища выручай» — так говорил великий полководец Александр Васильевич Суворов, в чьих войсках когда-то служил Петров дедушка, передавший эту военную мудрость своим потомкам. Петр понимает, что если Фома выйдет на улицу разбираться с бандитами, то его долг — помочь своему соседу. Если он не станет помогать, то он, Петр, будет не мужик. Моральный ущерб от такого неблагородного поступка Петр оценивает в 2 ед. полезности. Фома получил точно такое же воспитание, так что теперь матрица выигрышей у двух соседей такова (изменения выделены жирным шрифтом):

		Фома	
		Сидеть дома	Выйти разбираться
Петр	Сидеть дома	1; 1	**2**; 0
	Выйти разбираться	0; **2**	3; 3

На этот раз в игре существуют два равновесия. В одном оба соседа остаются дома, в другом — помогают друг другу; в последнем случае бандитов может ожидать неприятный сюрприз в виде организованного сопротивления со стороны жителей деревни.

Это — простой пример того, как человеческие представления о правильном и неправильном поведении, влияя на выигрыши людей, в итоге могут оказывать влияние и на их равновесное поведение. Все люди в той или иной степени следуют *нормам поведения* — негласным правилам, нарушение которых несет внутренний дискомфорт.

Очень часто эти правила помогают обществу более эффективно функционировать. В общественном транспорте принято уступать место пожилым людям. Любому автовладельцу знакомо понятие «культуры вождения» — негласных правил, которые принято соблюдать на дороге для того, чтобы облегчать жизнь себе и другим участникам движения, и делать вождение более безопасным. В некоторых странах (в большей степени, чем в некоторых других) принято не врать, не давать или не брать взятки, платить налоги, возвращать владельцу потерянные вещи. Экономическое благополучие страны напрямую связано с тем, насколько каждый ее гражданин готов ограничивать свое сиюминутное желание обогатиться за счет другого. Если люди готовы друг друга не обманывать, то транзакционные издержки при ведении совместных проектов ниже: не надо тратить время и силы на то, чтобы друг друга контролировать и друг за другом следить. При низких транзакционных издержках людям легче решать проблему коллективных действий.

С нормами поведения связано *доверие* людей друг к другу. Процент людей, которые в данной стране положительно отвечают на вопрос: «Считаете ли вы, что большинству людей можно доверять или надо быть осторожными в отношениях с людьми?» — положительно связан с тем, насколько в ней соблюдаются различные нормы поведения.

Следование нормам поведения, наряду с доверием, является одним из индикаторов *социального капитала* — способности людей действовать организованно в общих интересах. Другие важные компоненты социального капитала — вовлеченность людей в различные добровольные ассоциации: клубы по интересам, религиозные общины, неправительственные организации и т.д.

Почему в одних странах социальный капитал выше, чем в других? Скорее всего, важны как исторические и культурные факторы, так и недавние экономические и политические события. В пользу первого свидетельствует, например, хорошо изученный пример Италии. На более развитом и более преуспевающем севере страны граждане больше доверяют друг другу и чаще участвуют в политической и гражданской жизни страны, чем на юге. На севере выше и различные показатели качества работы государства [9].

Одна из возможных причин отставания юга Италии от севера — разная история. Юг в течение долгого времени, начиная с Раннего Средневековья, был частью различных централизованных монархических государств. В свою очередь, в истории севера Италии был период, когда крупные города являлись центрами республик, в которых часть населения была вовлечена в политическую жизнь. Люди были вынуждены учиться друг с другом договариваться. Это, по всей видимости, оставило отпечаток на культуре, который мы видим и по сей день.

С другой стороны, есть свидетельства, что социальный капитал накапливается (или, напротив, исчезает) под действием экономических обстоятельств. Высокий уровень благосостояния может заставить человека считать, что мир справедлив, и, как следствие, люди заслуживают доверия. Кроме того, более обеспеченный человек может меньше бояться рисковать — так как потеря части дохода не приведет к серьезной угрозе его личной безопасности. В целом, ученые пока не понимают до конца, как формируется культура человеческих взаимоотношений в обществе и насколько быстро она может меняться. Это — очень интересная область современной науки.

1.2. СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ И СУЩЕСТВОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ

Вспомним игру «камень-ножницы-бумага». В такой игре на каждую чистую стратегию имеется своя «оборотка». «Камень» бьет «ножницы», «ножницы» — «бумагу». Следовательно, если я буду знать, что мой соперник собирается выбросить «ножницы», то я должен сыграть «камень». Зная это, он сыграет «бумагу», на что я должен ответить, сыграв «ножницы». Равновесия Нэша в такой игре, очевидно, нет. Что делать игрокам? Можем ли мы как-то прогнозировать их действия? Для анализа таких игр необходимо расширить определение игры, разрешив *смешанные стратегии*.

1.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЙ

Предположим теперь, что у каждого игрока есть генератор случайных чисел, который говорит ему, какую из стратегий ему следует выбрать. Например, при наличии двух стратегий человек может подбрасывать монетку; в таком случае, вероятность того, что он сыграет каждую стратегию, равна 50%. Другим игрокам известна эта вероятность, однако наблюдать,

[9] Классическая работа, в которой сравниваются север и юг Италии — книга американского социолога Роберта Патнэма [1996]. Пример Италии рассматривался и во многих последующих научных работах.

как упала монета — орлом или решкой — они не могут. В этом случае мы говорим, что игрок i пользуется смешанной стратегией. Игрок решает, с какой вероятностью он должен выбрать каждую из своих стратегий из множества S_i, которые мы будем теперь называть *чистыми стратегиями*. Заметим сразу, что чистая стратегия — это частный случай смешанной стратегии, в котором один из элементов S_i выбирается с вероятностью 100%. Как мы опишем множество смешанных стратегий игрока? Например, в игре «камень-ножницы-бумага» у каждого игрока есть всего три чистых стратегии. Если p_1 — вероятность, с которой играется «камень», а p_2 и p_3 — вероятности для «ножниц» и «бумаги» соответственно, то мы должны иметь $p_i \geqslant 0$ для $i = 1, 2, 3$ и $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Формально, множество всех (p_1, p_2, p_3), удовлетворяющих этим свойствам, называется *двумерным симплексом*. Дадим два определения.

Определение 1.9. Пусть N — натуральное число. Тогда *симплекс* размерности $N - 1$ есть множество $\Delta^{N-1} \subset \mathbf{R}^N$, состоящее из всех $(p_1, \ldots, p_N) \in \Delta^{N-1}$ таких, что $\sum_j p_j = 1$, $p_j \geqslant 0$.

Получается, что $(N - 1)$-мерный симплекс описывает все возможные распределения вероятностей на множестве из N элементов. Размерность Δ^{N-1} на единицу меньше N из-за ограничения $p_1 + \ldots + p_N = 1$. Одномерный симплекс — это отрезок $[0, 1]$. Если $x \in [0, 1]$, то первый элемент множества выбирается с вероятностью x, второй элемент — с вероятностью $1 - x$.

Определение 1.10. Пусть $G = \langle I, S, u \rangle$ — конечная игра. Назовем $\Delta^{|S_i|-1}$ множеством *смешанных стратегий* игрока i, $\prod_{i=1}^{N} \Delta^{|S_i|-1}$ — множеством профилей смешанных стратегий. Элементы $\sigma_i \in \Delta^{|S_i|-1}$, $\sigma_{-i} \in \prod_{j \neq i} \Delta^{|S_j|-1}$ и $\sigma \in \prod_{i=1}^{N} \Delta^{|S_i|-1}$ будут называться смешанными стратегиями и профилями (во втором и третьем случаях) смешанных стратегий.

Иными словами, смешанная стратегия — это распределение вероятностей на множестве чистых стратегий. Мы предполагаем, что игрок имеет возможность предоставить выбор чистой стратегии (или действия) воле случая, но при этом контролировать вероятность, с которой реализуется та или иная чистая стратегия. Здесь и в дальнейшем мы будем предполагать, что действия любых двух игроков являются независимыми событиями. Пусть $s = (s_1, \ldots, s_N)$ — профиль чистых стратегий, σ — профиль смешанных стратегий, в котором игрок i играет чистую стратегию s_i с вероятностью $\sigma_i(s_i)$. Тогда вероятность того, что при профиле смешанных стратегий σ будет сыгран профиль чистых стратегий s, будет

$$\sigma(s) = \prod_{i=1}^{N} \sigma_i(s_i), \tag{1.27}$$

а математическое ожидание выигрыша игрока i —

$$u_i(\sigma) = u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s \in S} \sigma(s)\, u_i(s). \tag{1.28}$$

Теперь мы можем определить игру, в которой игроки могут пользоваться смешанными стратегиями.

Определение 1.11. Пусть $G = \langle I, S, u \rangle$ — конечная игра в нормальной форме. Назовем игру $\left\langle I,\ \prod_{i=1}^{N} \Delta^{|S_i|-1},\ u \right\rangle$ *смешанным расширением* игры G. Тогда равновесие в смешанных стратегиях в игре G — это равновесие Нэша в ее смешанном расширении $\big($и функция $u\colon \prod_{i=1}^{N} \Delta^{|S_i|-1} \to \mathbb{R}$ является продолжением функции $u\colon S \to \mathbb{R}\big)$.

В нашем определении u обозначает функцию выигрышей в игре как с чистыми стратегиями, так и со смешанными стратегиями. В этом нет противоречия, так как чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии.

1.2.2. РАВНОВЕСИЕ В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ

Существует следующий результат, принадлежащий американскому математику Джону Нэшу, одному из основателей теории игр.

Теорема 1.1 [Nash, 1950]. *Пусть G — конечная игра. Тогда в игре G существует равновесие в смешанных стратегиях.*

Эта теорема — один из наиболее важных результатов в современной науке об обществе. Фактически он означает, что равновесие Нэша является универсальным инструментом, который можно использовать для анализа любого игрового взаимодействия с конечным числом игроков и стратегий [10].

Доказательство этой теоремы содержится в приложении к этой главе. Рассмотрим, какие равновесия в смешанных стратегиях существуют для различных игр 2×2.

Пример нахождения смешанного равновесия в игре типа «инспекция». Финал Уимблдонского турнира, Роджер Федерер против Рафаэля Надаля. Федерер стоит на задней линии и собирается отбить мяч, посланный ему Надалем. Федерер решает, в какую сторону ему отбить мяч: направо вдоль края корта (DL) или налево наискосок (CC). Одновременно Надаль пытается угадать направление, в котором полетит мяч. Он также может побежать отбивать подачу прямо, вдоль края корта (DL) или наискосок налево (CC, см. рис. 1.5).

[10] Мы предположили, что игроки разыгрывают чистые стратегии независимо друг от друга. Если ослабить это предположение, то можно сформулировать так называемое *коррелированное равновесие*, частным случаем которого является равновесие Нэша.

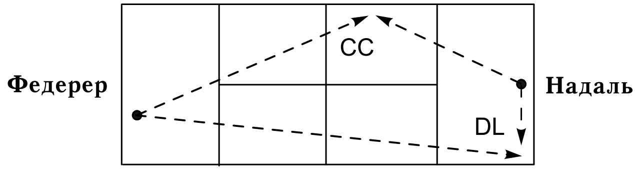


Рис. 1.5. Игра в теннис

Оба очень хорошо играют в теннис. Пока Федерер не ударит, Надаль не побежит отбивать: иначе Федерер ударит в другую сторону и выиграет гейм. Но если Надаль будет ждать, пока Федерер нанесет удар, то он тоже проиграет, так как удары в профессиональном теннисе очень сильные. Таким образом, оба игрока одновременно решают, что им делать. При этом множества чистых стратегий у Федерера и у Надаля одинаковы: $S_1 = S_2 = \{\mathtt{CC}, \mathtt{DL}\}$. Выигрыш Федерера равен вероятности того, что он выиграет розыгрыш, выигрыш Надаля равен вероятности того, что этого не произойдет. Следовательно, сумма выигрышей обоих игроков не зависит от профиля стратегий. Записывая матрицу выигрышей в такой игре, для каждого профиля стратегий достаточно указать только выигрыш первого игрока. В нашем случае матрица будет такой:

		Надаль	
		DL	CC
Федерер	DL	0,5	0,8
	CC	0,9	0,2

Если Надаль правильно угадывает направление удара, то он имеет хорошие шансы отбить мяч — очень хорошие, если Федерер бьет наискосок. Но если Надаль не угадывает, то вероятность того, что он сумеет «догнать» мяч и спасти игру, невелика. Эта игра не имеет равновесий в чистых стратегиях и принадлежит к тому же классу игр, как и игра контролера с зайцем.

Найдем равновесие в смешанных стратегиях. Пусть $p \in [0,1]$ — смешанная стратегия Федерера, т.е. вероятность того, что он ударит вдоль края корта (DL). Аналогично, обозначим через $q \in [0,1]$ вероятность того, что Надаль побежит отбивать в этом же направлении. Найдем математическое ожидание выигрышей обоих игроков:

$$u_F(p,q) = \quad 0{,}5\,pq + 0{,}8\,p\,(1-q) + 0{,}9\,(1-p)\,q + 0{,}2\,(1-p)(1-q), \quad (1.29)$$

$$u_N(p,q) = -0{,}5\,pq - 0{,}8\,p\,(1-q) - 0{,}9\,(1-p)\,q - 0{,}2\,(1-p)(1-q). \quad (1.30)$$

Найдем равновесие в этой игре. Предположим, что q известно Федереру. Тогда его максимизационная задача будет

$$\max_{p\in[0,1]} u_F(p,q), \quad (1.31)$$

а ее решение —

$$\check{p}(q) = \begin{cases} 1, & q < 0{,}6; \\ [\,0{,}1], & q = 0{,}6; \\ 0, & q > 0{,}6. \end{cases} \tag{1.32}$$

Аналогично для Надаля: задача

$$\max_{q \in [0,1]} u_N(p, q) \tag{1.33}$$

имеет решение

$$\check{q}(p) = \begin{cases} 1, & p > 0{,}7; \\ [\,0{,}1], & p = 0{,}7; \\ 0, & p < 0{,}7. \end{cases} \tag{1.34}$$

Функции $\check{p}(q)$ и $\check{q}(p)$ являются функциями реакции двух игроков. Равновесие Нэша будет являться решением системы

$$\begin{aligned} \check{p}(q) &= p, \\ \check{q}(p) &= q. \end{aligned} \tag{1.35}$$

На рис. 1.6, *а* изображены графики функций реакции обоих игроков. Эти графики имеют единственную точку пересечения $(p^*, q^*) = (0{,}7; 0{,}6)$. Это и есть равновесие Нэша в смешанных стратегиях. Таким образом, Федерер в равновесии будет играть DL с вероятностью 0,7 и CC с вероятностью 0,3, а Надаль — DL с вероятностью 0,6 и CC с вероятностью 0,4.

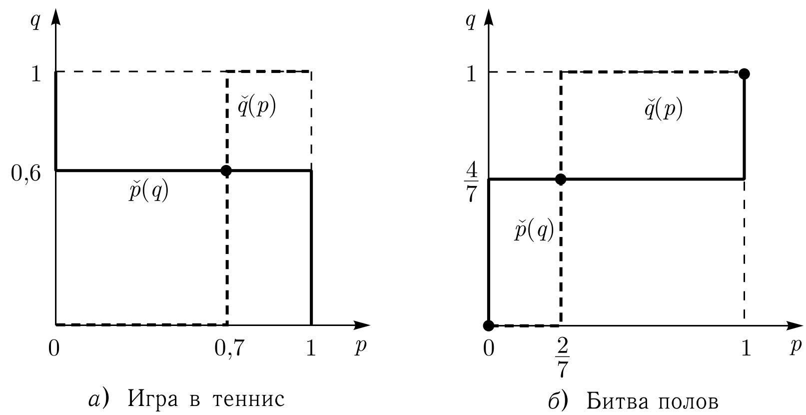


Рис. 1.6. Функции реакции для различных игр 2×2

Равновесие в смешанных стратегиях в игре «семейный спор». Муж и жена решают, как им следует провести вечер. Обсуждаются два варианта: футбол и балет. Мужу больше нравится футбол, жене — балет. При этом они хотят быть вместе: если они идут в разные места, то вечер пропадает. Матрица выигрышей в нашей игре будет

		Жена	
		балет	футбол
Муж	балет	3; 5	0; 0
	футбол	0; 0	4; 2

Этот классический пример, называющийся «семейный спор», является координационной игрой: сразу видно, что существуют два равновесия в чистых стратегиях. Но существуют ли равновесия в смешанных стратегиях? Пусть p и q — вероятности, с которыми муж и жена выбирают балет. Тогда их выигрыши будут

$$\begin{aligned} u_1(p,q) &= 3\,p\,q + 4\,(1-p)(1-q), \\ u_2(p,q) &= 5\,p\,q + 2\,(1-p)(1-q), \end{aligned} \tag{1.36}$$

а их функции реакции —

$$\check{p}(q) = \begin{cases} 1, & q > 4/7; \\ [\,0{,}1], & q = 4/7; \\ 0, & q < 4/7; \end{cases} \qquad \check{q}(p) = \begin{cases} 1, & p > 2/7; \\ [\,0{,}1], & p = 2/7; \\ 0, & p < 2/7. \end{cases} \tag{1.37}$$

У этой игры три равновесия: два в чистых стратегиях ($p = 1$, $q = 1$ и $p = 0$, $q = 0$) и одно равновесие в смешанных стратегиях: $p = 2/7$, $q = 4/7$ (рис. 1.6, *б*). Отметим, что небольшие изменения матрицы выигрышей не влияют на существование равновесий в чистых стратегиях. В частности, профиль стратегий (балет; балет) перестанет быть равновесием, если выигрыш мужа при этом профиле стратегий будет меньше нуля. В общем случае существование равновесия в чистых стратегиях определяется условиями типа неравенств (см. задачу 1.3); для того чтобы (балет; балет) являлся равновесием в чистых стратегиях, нам необходимо и достаточно, чтобы выигрыш мужа был выше, чем при (футбол; балет), и выигрыш жены был выше, чем при (балет; футбол). В то же время для того, чтобы найти равновесие в смешанных стратегиях, нам необходимо знать точные значения выигрышей обоих игроков.

Важные свойства равновесия. В смешанном расширении конечной игры выигрыш каждого игрока является линейной функцией от вероятности сыграть ту или иную стратегию. Благодаря этому факту равновесие в смешанных стратегиях обладает свойствами, которые могут пригодиться при его нахождении в некоторых играх. Во-первых, игроку безразлично, какую из своих чистых стратегий играть в равновесии:

Лемма 1.6. *Пусть* $G = \langle I, S, u\rangle$ *— игра,* σ^* *— равновесие Нэша в смешанных стратегиях. Пусть* $S_i^{\sigma_i^*} \subseteq S_i$ *— носитель стратегии* σ_i^*, *т.е. множество всех чистых стратегий, играемых с положительной вероятностью при смешанной стратегии* σ_i^*. *Тогда для всех* $s_i \in S_i^{\sigma_i^*}$

$$u_i(s_i, \sigma_{-i}^*) = u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*), \tag{1.38}$$

а для всех $s_i' \notin S_i^{\sigma_i^*}$

$$u_i(s_i', \sigma_{-i}^*) \leqslant u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*). \tag{1.39}$$

Действительно, допустим, что это не так. Пусть σ^* — равновесие в смешанных стратегиях, причем стратегии $s_1, s_1' \in S_i$ играются с вероятностями $p > 0$, $p' > 0$. Пусть $u_i(s_1, \sigma_{-i}^*) > u_i(s_1', \sigma_{-i}^*)$. Легко проверить, что стратегия σ_i', которая отличается от σ_i^* тем, что s_1 играется с вероятностью $p + p'$, а s_1' — с вероятностью 0, дает выигрыш, больший на $p'(u_i(s_1, \sigma_{-i}^*) - u_i(s_1', \sigma_{-i}^*))$. Это противоречит предположению о том, что σ^* — равновесие Нэша.

Во-вторых, при переходе от игры к ее смешанному расширению равновесия в чистых стратегиях сохраняются:

Лемма 1.7. *Пусть в конечной игре* G *существует равновесие* $s^* = (s_1^*, \ldots, s_N^*)$. *Тогда в смешанном расширении игры* G *существует равновесие, в котором игрок* i *играет стратегию* s_i^* *с вероятностью 1.*

В задаче 1.9 предлагается доказать это утверждение.

Игра «выбор чисел». С Курского вокзала отправляется электричка, состоящая из K вагонов. В игре участвуют два игрока: безбилетник и контролер. Каждый выбирает целое число от 1 до K и заходит в вагон с соответствующим номером. При совпадении вагонов контролер штрафует безбилетника, получая одну условную единицу выигрыша (безбилетник проигрывает столько же). Если выбранные двумя игроками вагоны не совпадают, то безбилетник благополучно выходит на следующей остановке. При этом и безбилетник, и контролер получают по 0 единиц.

Найдем равновесие в смешанных стратегиях (сразу заметив, что чистых равновесий в этой игре нет). Пусть $\sigma_1 = (p_1, \ldots, p_K)$ — смешанная стратегия игрока 1 (контролера), где p_l — вероятность того, что он проверит вагон $1 \leqslant l \leqslant K$. Аналогично определим $\sigma_2 = (q_1, \ldots, q_K)$ — смешанную стратегию безбилетника (по определению смешанной стратегии $\sum_i p_i = 1$, $\sum_i q_i = 1$). Выигрыши игроков в зависимости от их смешанных стратегий будут

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{l=1}^{K} p_l\, q_l, \tag{1.40}$$

$$u_2(\sigma_1, \sigma_2) = -\sum_{l=1}^{K} p_l\, q_l. \tag{1.41}$$

Найдем функцию наилучшего отклика для игрока 1. Если $q_1 = \ldots = q_K$, то игроку 1 все равно, какую стратегию выбрать. Пусть для каких-то l, k выполняется $q_l > q_k$. Тогда если $p \in \check{p}(q)$, то мы не можем иметь $p_k > 0$, ибо стратегия p', в которой $p'_l = p_k + p_l$, $p'_k = 0$ и $p'_j = p_j$ для $j \neq k, l$, будет давать игроку 1 больший выигрыш. В то же время, если для k, l мы имеем $q_k = q_l = \max\limits_i q_i$, то выигрыш игрока 1 будет одинаков для стратегий p и p' таких, что $p_j = p'_j$ для всех $j \neq k, l$. То есть функция реакции игрока 1 будет

$$\check{p}(q) = \left\{ p \;\middle|\; \sum p_k = 1,\, p_k \geqslant 0;\ \text{причем } p_k = 0,\ \text{если}\ \ q_k < \max_j q_j \right\}. \quad (1.42)$$

Аналогично, игрок 2 назовет число l с положительной вероятностью, только если игрок 1 играет это число с минимальной вероятностью:

$$\check{q}(p) = \left\{ q \;\middle|\; \sum q_k = 1,\, q_k \geqslant 0;\ \text{причем } q_k = 0,\ \text{если}\ \ p_k > \min_j p_j \right\}. \quad (1.43)$$

Можно доказать (задача 1.8), что у системы $p \in \check{p}(q)$, $q \in \check{q}(p)$ есть единственное решение: $p = q = \left(\dfrac{1}{K}, \ldots, \dfrac{1}{K}\right)$. В равновесии и безбилетник, и контролер с равной вероятностью будут посещать все вагоны.

1.2.3. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЙ И РАВНОВЕСИЙ

Понятие смешанной стратегии — одно из часто критикуемых мест теоретико-игрового подхода к анализу человеческого поведения. Почему мы вообще имеем право предполагать, что люди (или организации) принимают решения случайным образом? В нашем понимании место генераторов случайных чисел — настольные игры и казино; за их пределами все наши решения кажутся продуманными, а не продиктованными кубиком или колесом рулетки. Однако существует несколько причин, оправдывающих использование смешанных стратегий при моделировании поведения людей и организаций. Во-первых, существуют доказательства использования смешанных стратегий людьми. Во-вторых, смешанные стратегии можно интерпретировать как чистые статегии в играх с большим числом игроков. И в-третьих, мы будем расценивать чье-то поведение как случайное тогда, когда мы не обладаем всей полнотой информации о целевой функции этого человека; с его же собственной точки зрения, его поведение будет детерминировано[11].

Примеры использования смешанных стратегий в жизни. Бересфорд и Пестон [1955] приводят пример использования смешанной стратегии одним британским офицером. Во время колониальной войны в Малайзии

[11] См. статью Рубинштейна [Rubinstein, 1991], где обсуждается интерпретация смешанных равновесий.

в конце 1940-х годов британские войска несли потери от партизанских атак на их сухопутные конвои с продовольствием и оружием. Партизаны могли либо устроить конвою крупную засаду, либо подвергнуть его нескольким мелким снайперским атакам с целью деморализации водителей, которых британцы набирали из местного населения. Соответственно, британцы могли либо сосредоточить свои силы посередине конвоя (что было более эффективно при отражении крупных атак), либо рассредоточиться (что было более эффективно в борьбе против снайперов). Каждый раз перед отправкой конвоя командир тянул жребий, с вероятностью 50% выбирая каждую из двух возможных тактик[12]. Хотя британский офицер не знал теории игр, он понимал необходимость быть непредсказуемым, чтобы не дать партизанам возможность прогнозировать действия британцев и оптимально реагировать на них.

Случаи, когда использование смешанных стратегий было задокументировано, довольно редки. Можно ли доказать использование смешанных стратегий, основываясь на наблюдениях за стратегиями, выбираемыми игроками, а не за механизмом принятия решения, как это было в случае, описанном выше? Для этого необходим большой объем наблюдений. Нужно, чтобы действия двух или более игроков наблюдались в похожих условиях много раз подряд. Хорошим источником таких данных является спортивная статистика.

Уокер и Вудерс [Walker, Wooders, 2002] исследовали игру теннисистов в 10 матчах — финалах турниров Большого шлема. Насколько поведение элитных игроков, среди прочих, Андре Агасси, Пита Сампраса, Бьерна Борга, соответствует нашему представлению о равновесных стратегиях? Авторы изучили, как вероятность выиграть подачу в отдельно взятом матче зависит от направления подачи: под правую руку или под левую. Если гипотеза о равновесном поведении подающего и принимающего игроков верна, то вероятность выиграть должна быть одинаковой для обоих направлений подачи. К такому выводу и пришли авторы.

Чиапоре, Левитт и Гросеклоуз [Chiappore, Levitt, Groseclose, 2002] провели анализ поведения голкиперов и форвардов во время исполнения пенальти. Большинство голкиперов не успевает реагировать на направление полета мяча; как и при теннисной подаче, голкипер вынужден угадывать, в какой угол (или, может быть, в центр ворот) полетит мяч. В этой работе использовались иные статистические методы, ибо в теннисе один матч между двумя игроками создает достаточно наблюдений для статистически значимых выводов, в то время как в футболе количество взаимодействий между каждой парой форвард–голкипер весьма невелико, даже на протяжении нескольких сезонов. Тем не менее авторы показали, что стратегии и вратарей, и форвардов близки к равновесным.

[12] Эта история также приводится в работе [Dixit, Skeath, 2004].

Смешанные стратегии в лабораторных экспериментах. В ходе экономического эксперимента подопытные добровольцы много раз подряд играют в одну и ту же игру в тщательно контролируемых условиях; на основе стратегий, выбираемых субъектами эксперимента, можно сделать вывод о виде стратегий, которые они используют. Полфри и Арагонес [Aragones, Palfrey, 2004] исследовали поведение субъектов в игре, моделирующей поведение политиков, претендующих на президентский пост на демократических выборах. У каждого из двух игроков было по три стратегии: предложить избирателям центристскую, левую, или правую политическую программу (задача 1.18). Игра не была симметричной: каждый из кандидатов являлся либо «сильным», либо «слабым». Если оба кандидата выбирали одинаковые стратегии, то слабый кандидат проигрывал выборы вчистую. Если стратегии у кандидатов были разные, то слабый кандидат мог проиграть с меньшим отставанием (что подразумевало больший выигрыш) или даже выиграть выборы (если он занимал центристскую позицию, а сильный кандидат — одну из двух крайних). В этой игре, как и в игре «инспекция», не существует равновесий в чистых стратегиях; оставалось выяснить, будут ли субъекты эксперимента действительно играть смешанные стратегии.

Субъектами эксперимента являлись студенты Калифорнийского технологического института и Института экономического анализа в Барселоне; участие в эксперименте оплачивалось наличными. В каждой экспериментальной сессии участвовало от 8 до 16 человек, поделенных на две группы — сильные и слабые кандидаты. В каждом из первых 50 раундов каждый слабый кандидат проводил одну игру с выбранным наугад (и неизвестным ему) сильным кандидатом. Далее сильные и слабые кандидаты менялись местами, и разыгрывалось еще 50 раундов. В конце сессии каждый из субъектов получал денежный выигрыш, равный сумме выигрышей, полученных им в 100 раундах (для американских вузов средний выигрыш от участия в экономических экспериментах составляет порядка 25 долларов). Эксперимент показал, что игроки действительно используют смешанные стратегии; при этом, однако, частота использования различных чистых стратегий не всегда была равна равновесной, в особенности для слабых кандидатов (которые чаще, чем было предсказано равновесием Нэша, выбирали центристскую стратегию).

Отмечено, что и в спортивных соревнованиях, и в экспериментах игроки скорее чередуют стратегии, нежели каждый раз делают действительно случайный выбор, независимый от сделанного в предыдущий раз. Например, анализ теннисных подач показал, что если игрок в предыдущий раз подавал налево, то в следующий раз он с большей вероятностью подаст направо. Однако их противники тоже ошибались, воспринимая это как случайное поведение. Они не эксплуатировали тот факт, что направление каждой подачи отрицательно коррелирует с направлением предыдущей подачи: им самим казалось, что никакой корреляции не было.

Большое число игроков. Смешанные равновесия в игре с небольшим числом игроков могут описывать равновесия в чистых стратегиях в тех случаях, когда игроков на самом деле много. Рассмотрим, например, игру между безбилетником и контролером на с. 32. Напомним, что в этой игре существует единственное равновесие в смешанных стратегиях, в котором каждый из двух игроков с равной вероятностью выбирает одно из двух действий (садиться в первый или во второй вагон поезда). Предположим, что и безбилетник, и контролер могут играть только чистые стратегии, но безбилетников и контролеров много — скажем, несколько тысяч. Если в один поезд садятся один безбилетник и один контролер, то для безбилетника, столкнувшегося с неизвестным ему контролером, эта ситуация эквивалентна встрече с контролером, играющим равновесную смешанную стратегию. То же самое верно и для контролера; с точки же зрения стороннего наблюдателя, и безбилетник, и контролер оба играют смешанные стратегии. Такая интерпретация удобна, но не всегда уместна: иногда число игроков в моделируемой ситуации действительно мало́ (например, если речь идет о международном конфликте), либо мы не имеем права предполагать, что игроки сталкиваются друг с другом впервые («семейный спор»).

Смешанные стратегии как следствие ненаблюдаемых выигрышей игроков. Смешанные стратегии могут быть следствием того, что выигрыш игрока в зависимости от реализуемой им стратегии может быть известен ему одному. Рассмотрим пример на с. 22. Маша и Андрей должны выбрать одно из двух мест встречи; если их выбор совпадает, то каждый из них получает единичный выигрыш, если выбор не совпадает, то выигрыш каждого равен нулю. В этой игре существуют три равновесия: два — в чистых стратегиях (каждое из которых соответствует одному из мест встречи) и одно — в смешанных (в нем каждый из двух игроков выбирает одно из двух мест встречи с равной вероятностью). Как можно объяснить существование третьего равновесия? Предположим, что итоговый выигрыш Андрея от места встречи, которое он выбрал, зависит от ненаблюдаемых Машей вещей — например, от того, с какой ноги Андрей встал сегодня утром. Если Андрей встал с левой ноги, то он будет отдавать предпочтение встрече у метро, если с правой — то встрече у театра. В таком случае с точки зрения Маши он будет играть смешанную стратегию, а со своей собственной точки зрения — чистую. Маша действует точно так же; оба игрока при этом поступают рационально, но (с точки зрения стороннего наблюдателя) при этом действуют случайным образом. Более подробно об этом примере и об играх с ненаблюдаемыми выигрышами мы будем говорить в третьей главе этой книги.

1.2.4. СМЕШАННОЕ РАВНОВЕСИЕ В АНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЕ $2\times M$

Важный подкласс игр составляют игры, в которых сумма выигрышей игроков одинакова, вне зависимости от профиля стратегий, выбираемого игроками.

Определение 1.12. Игра $G = \langle I, S, u\rangle$ является *игрой с постоянной суммой*, если

$$\sum_{i=1}^{N} u_i(s) = c \tag{1.44}$$

для некоторого c и всех $s \in S$. Если $N = 2$, то такая игра называется *антагонистической*.

Такие игры часто также называют *играми с нулевой суммой*. Действительно, если мы вычтем c из функции выигрыша одного из игроков, то игра почти не изменится, так как не изменится функция реакции этого игрока. В то же время сумма выигрышей всех игроков будет равна нулю. В данном случае название — это вопрос вкуса; примерами игр с нулевой суммой являются салонные игры, игры типа «инспекция», предвыборная борьба (в том случае, если издержки политиков не зависят от их действий), заключение опционных контрактов на фондовом рынке. Существование равновесия и многие другие результаты для этого класса игр были получены великим математиком Джоном фон Нейманом (см. книгу [Фон Нейман, Моргенштерн, 1970]).

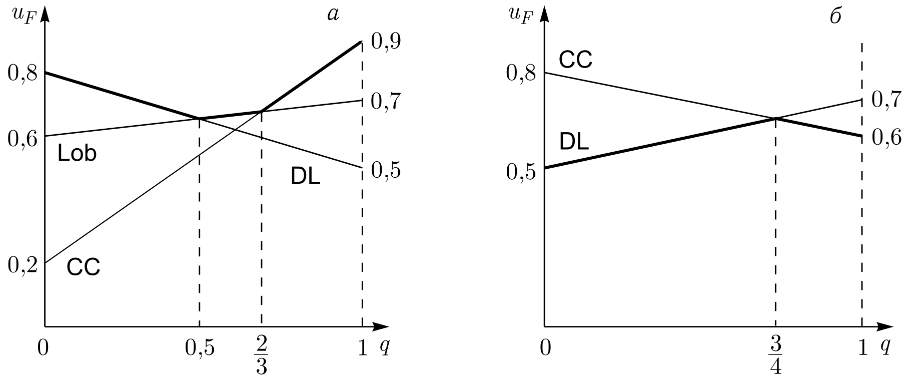
Рассмотрим пример с игрой в теннис. Пусть в арсенале у Федерера есть еще один удар: `Lob` («свеча»). Матрица игры теперь такая:

		Надаль	
		`DL`	`CC`
Федерер	`DL`	0,5	0,8
	`CC`	0,9	0,2
	`Lob`	0,7	0,6

На рис. 1.7, a показано, как выигрыш Федерера зависит от смешанной стратегии Надаля q для каждой из трех чистых стратегий Федерера, где q, как и раньше, есть вероятность того, что Надаль сыграет `DL`.

Жирная ломаная линия показывает максимальный выигрыш, который может получить Федерер, в зависимости от стратегии Надаля q. По этому графику можно построить функцию реакции Федерера. Если $q < 1/2$, то Федерер играет `DL`; если $q = 1/2$ — то любую смесь `DL` и `Lob`; если $q \in \left(1/2; 2/3\right)$ — то `Lob`; если $q = 2/3$ — то смесь `Lob` и `CC`, если $q > 2/3$ — то `CC`.

Так как эта игра является антагонистической, то в равновесии стратегия Надаля должна минимизировать максимальный выигрыш Федерера.



а) Для смешанной стратегии Надаля q и разных чистых стратегий Федерера

б) Для смешанной стратегии Федерера p и разных чистых стратегий Надаля

Рис. 1.7. Нахождение равновесия при трех чистых стратегиях у Федерера

Действительно, предположим, что в равновесии $q \neq 1/2$. Тогда (предполагая равновесие) выигрыш Федерера будет максимальным для данного q, например, при $q < 1/2$ Федерер будет играть DL. Но это означает, что Надаль может увеличить свой выигрыш, выбрав стратегию $q = 1/2$. Таким образом, $q = 1/2$. Нам остается найти пропорции, в которых Федерер играет DL и Lob. На рис. 1.7, *б* показан выигрыш Федерера (равный единице минус проигрыш Надаля) в зависимости от p — вероятности, с которой Федерер играет Lob при разных чистых стратегиях Надаля. Жирная линия — минимальный выигрыш Федерера (и, соответственно, максимальный выигрыш Надаля) в зависимости от p. Из графика видно, что $p = 3/4$.

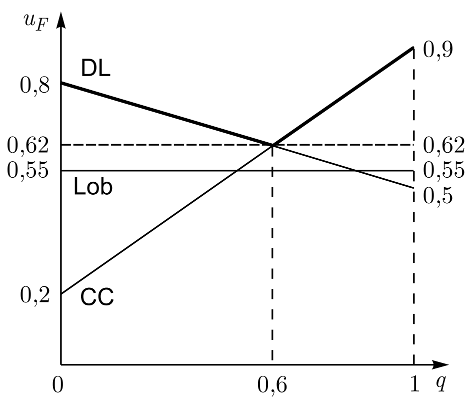


Рис. 1.8. Смешанная стратегия доминирует чистую стратегию

Давайте немного изменим выигрыши игроков:

		Надаль	
		DL	CC
Федерер	DL	0,5	0,8
	CC	0,9	0,2
	Lob	0,55	0,55

Выигрыш Федерера в зависимости от q показан на рис. 1.8.

Как мы видим, Федерер не станет использовать стратегию `Lob` ни при каких q. Стратегия `Lob` не доминируется ни одной из двух других чистых стратегий; однако она доминируется некоторыми смешанными стратегиями — например, смесью из 70% `DL` и 30% `CC`, которая дает Федереру ожидаемый выигрыш 0,62 вне зависимости от стратегии Надаля. Поэтому мы поступаем с ней, как и с любой другой доминируемой стратегией — вычеркиваем. Она не будет играться ни в одном равновесии, чистом или смешанном (см. задачи 1.7, 1.23).

1.3. НЕПРЕРЫВНЫЕ ИГРЫ

Теорема о существовании равновесия в смешанных стратегиях была доказана для конечных игр: мы предполагали, что у каждого игрока имеется конечное число стратегий. Во многих играх, напротив, удобно считать, что множество стратегий не является конечным или даже счетным. Например, в дуополии Курно стратегия каждой из двух фирм — какое-то неотрицательное действительное число. Это предположение облегчает нам анализ задачи, так как (предполагая дифференцируемость функций выигрышей) мы можем находить равновесия, анализируя локальные максимумы функций выигрышей игроков. Дуополия Курно соответствует следующему определению.

Определение 1.13. Игра $G = \langle I, S, u \rangle$ называется *непрерывной игрой*, если для всех i множество стратегий S_i является выпуклым подмножеством конечномерного евклидова пространства $\mathbb{R}^{d_i}$, а функция выигрышей $u_i(s)$ является непрерывной по s.

Мы говорим, что множество $X \subset \mathbb{R}^d$ при некотором d является *выпуклым*, если для всех $x, y \in X$ и для всех $\alpha \in (0,1)$ мы имеем $\alpha x + (1-\alpha) y \in X$.

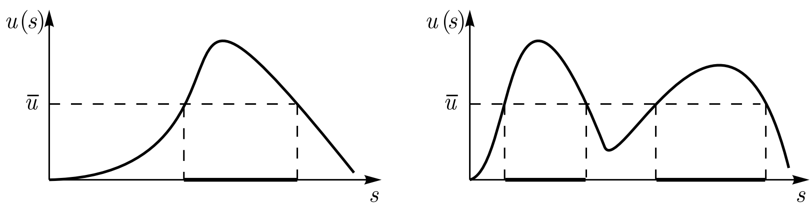
1.3.1. ТЕОРЕМЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ РАВНОВЕСИЯ

Можем ли мы что-нибудь сказать о существовании равновесий в чистых и смешанных стратегиях в таких играх? Существует несколько теорем, которые обозначают необходимые условия существования равновесий в непрерывных играх. Определим квазивогнутую функцию.

Определение 1.14. Пусть X — выпуклое подмножество конечномерного евклидова пространства. Функция $u\colon X \to \mathbb{R}$ является *квазивогнутой*, если для всех $\overline{u}$ множество $\{x \mid u(x) \geqslant \overline{u}\}$ является выпуклым.

Легко показать, что каждая вогнутая функция является квазивогнутой, но не наоборот. Также верно то, что каждая монотонная функция одной переменной является квазивогнутой (см. задачу 1.10).

Примеры квазивогнутой и не квазивогнутой функций приведены на рис. 1.9.



а) Квазивогнутая функция *б*) Не квазивогнутая функция

Рис. 1.9. Примеры квазивогнутости и ее отсутствия

На рис. 1.9, *а* функция удовлетворяет следующему условию: для данного $\overline{u}$ (как и для любого другого) множество $\{s \mid u(s) \geqslant \overline{u}\}$ (показанное на рисунке) является выпуклым. На рис. 1.9, *б* условия квазивогнутости нарушаются: для данного $\overline{u}$ множество $\{s \mid u(s) \geqslant \overline{u}\}$ является объединением двух отрезков — т.е. оно не выпукло.

На свойство квазивогнутости опирается следующая теорема, доказанная Гликсбергом [Glicksberg, 1952].

Теорема 1.2. *Рассмотрим непрерывную игру $G = \langle I, S, u\rangle$, в которой множества стратегий S_i являются выпуклыми компактами. Предположим, что для каждого игрока i функция выигрышей $u_i(s_i, s_{-i})$ является квазивогнутой по s_i для всех $s_{-i} \in S_{-i}$. Тогда в игре G существует равновесие Нэша в чистых стратегиях.*

Доказательство этой теоремы похоже на доказательство теоремы Нэша (с. 62–64): мы показываем, что точечно-множественное отображение, построенное из функций реакций игроков, удовлетворяет условиям теоремы Какутани и имеет неподвижную точку. Более того, теорема о существовании смешанного равновесия в конечных играх является частным случаем этой теоремы. Действительно, смешанное расширение любой конечной игры является непрерывной игрой, удовлетворяющей условиям теоремы 1.2.

Посмотрим, что произойдет, если условие квазивогнутости функции выигрышей будет нарушено[13].

[13] Точнее, речь идет о полунепрерывности сверху.

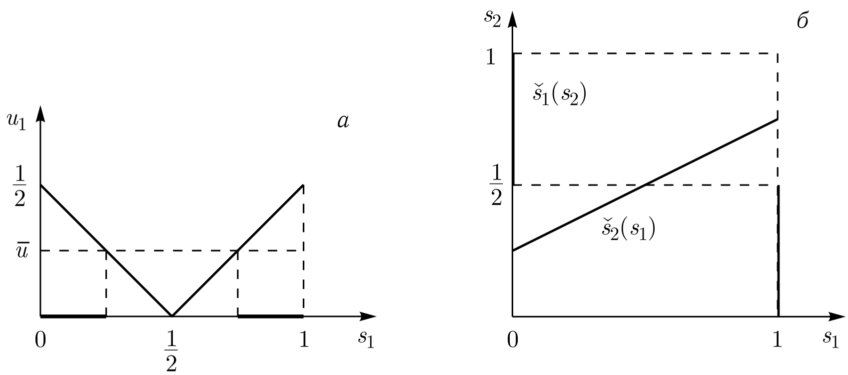
Рассмотрим такой пример. Пусть $S_1 = S_2 = [0, 1]$,

$$u_1(s_1, s_2) = |s_1 - s_2|,$$
$$u_2(s_1, s_2) = -s_2^2 + \Big(\frac{1}{2} + s_1\Big)s_2. \tag{1.45}$$

Обе функции выигрышей непрерывны по s_1 и s_2. Однако функция выигрышей первого игрока не является квазивогнутой: из рис. 1.10, *а* видно, что множество значений s_1, при которых $u_1 \geqslant \overline{u}$, не является выпуклым. Функция реакции первого игрока не является непрерывной:

$$\check{s}_1(s_2) = \begin{cases} 0, & s_2 > 1/2; \\ \{0, 1\}, & s_1 = 1/2; \\ 1, & s_2 < 1/2, \end{cases} \qquad \check{s}_2(s_1) = 0{,}25 + 0{,}5\, s_1. \tag{1.46}$$

Графики функций реакции не пересекаются (рис. 1.10, *б*), следовательно, равновесие в чистых стратегиях не существует.



а) Функция выигрышей игрока 1 не является квазивогнутой $\Big(s_2 = \frac{1}{2}\Big)$

б) Функции реакции игроков не пересекаются

Рис. 1.10. Пример отсутствия равновесия в непрерывной игре

Можем ли мы рассчитывать на существование равновесия Нэша в смешанных стратегиях в бесконечных играх? Оказывается, что для существования равновесия в бесконечных играх нужны дополнительные условия.

Теорема 1.3. *Рассмотрим игру $G = \langle I, S, u\rangle$, в которой множества стратегий S_i являются выпуклыми и компактными подмножествами конечномерных евклидовых пространств $\mathbb{R}^{d_i}$. Предположим, что для каждого игрока i функция выигрышей $u_i(s_i, s_{-i})$ является непрерывной по $s = (s_i, s_{-i})$. Тогда в игре G существует равновесие Нэша в смешанных стратегиях.*

Доказательство этой теоремы технически более сложно, чем доказательства предыдущей теоремы и теоремы Нэша, ибо множество смешанных стратегий в непрерывной игре является бесконечномерным. Здесь необходим более сильный результат, чем теорема Какутани. Формулировка и доказательство последнего выходят за рамки этой книги (см. [Glicksberg, 1952]).

1.3.2. ПРИМЕРЫ

Борьба за ренту. Две фирмы соревнуются за право построить магазин на центральной площади города. Для того чтобы получить контракт, необходимо потратить некоторую сумму денег на лоббирование органов власти. Успех не гарантирован — но чем больше денег будет потрачено каждой из фирм, тем больше вероятность того, что именно эта фирма получит контракт. Пусть прибыль, которую может приносить магазин, равна R. Предположим, что вероятность того, что фирма $i = 1, 2$ получит контракт, равна

$$p_i = \frac{r_i^\gamma}{r_1^\gamma + r_2^\gamma}, \tag{1.47}$$

где r_i — количество средств, потраченное фирмой i, $\gamma \geqslant 0$ — параметр, отражающий эффективность лоббирования. При $r_1 = r_2 = 0$ положим $p_1 = p_2 = 1/2$. Чем выше γ, тем больше преимущество фирмы, затратившей на лоббирование больше средств. Действительно, рассмотрим два крайних случая. Если $\gamma = 0$, то вероятность получить контракт всегда равна $1/2$, вне зависимости от объема средств, потраченных на лоббирование. Если же $\gamma \to \infty$, то контракт с вероятностью 1 достается фирме, которая затратила больше средств на лоббирование.

Получается, что функция выигрышей фирмы $i = 1, 2$ будет

$$u_i(r_1, r_2) = R\,\frac{r_i^\gamma}{r_1^\gamma + r_2^\gamma} - r_i, \tag{1.48}$$

где $r_i \in [0, \infty)$ — стратегия фирмы i.

В более общем случае мы рассматриваем задачу состязательного распределения ресурса, в которой вероятность приобретения ресурса одной из сторон (либо, в другой постановке, количества ресурса) является функцией от усилий, затраченных в борьбе за этот ресурс. Большой объем литературы в области моделирования состязаний восходит к работам Таллока [Tullock, 1967], Крюгер [Krueger, 1974] и Познера [Posner, 1975]. Лоббирование, коррупция, патентные гонки, спортивные состязания и войны — все это является примерами состязаний, *борьбы за ренту*, или *рентоориентированного поведения*. В таких играх вероятность успеха возрастает с увеличением затрат, однако сами затраты являются *невозвратными* и не возмещаются игроку в случае проигрыша.

Функции выигрышей являются дифференцируемыми по r_1 и r_2. Соответственно, если (r_1, r_2) — равновесие, то в нем должны выполняться необходимые условия первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial r_i} &= 0 \quad \text{при} \quad r_i > 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial r_i} &\leqslant 0 \quad \text{при} \quad r_i = 0 \end{aligned} \tag{1.49}$$

для $i = 1, 2$. Второе условие было записано, ибо мы рассматриваем задачу условной максимизации при $r_i \geqslant 0$.

Мы имеем

$$\frac{\partial u_1}{\partial r_1} = R\,\frac{\gamma\, r_1^{\gamma-1} r_2^{\gamma}}{(r_1^{\gamma} + r_2^{\gamma})^2} - 1, \tag{1.50}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial r_2} = R\,\frac{\gamma\, r_2^{\gamma-1} r_1^{\gamma}}{(r_1^{\gamma} + r_2^{\gamma})^2} - 1. \tag{1.51}$$

Условия первого порядка дают нам единственное решение:

$$r_1^* = r_2^* = \frac{\gamma R}{4}. \tag{1.52}$$

Легко проверить, что условия максимума второго порядка в этой точке будут выполнены. Однако $(r_1^*, r_2^*) = \left(\frac{\gamma R}{4}, \frac{\gamma R}{4}\right)$ будет равновесием Нэша только при $\gamma \leqslant 2$. В ином случае равновесие не существует, так как $u_1(r_1^*, r_2^*) = \frac{R}{2} - \frac{\gamma R}{4} < 0 = u_1(0, r_2^*)$ (при том, что $(r_1^*, r_2^*) = \left(\frac{\gamma R}{4}, \frac{\gamma R}{4}\right)$ является *необходимым* условием равновесия). Если $\gamma > 0$, то (r_1^*, r_2^*) является *локальным* равновесием, т.е. в этой точке функция выигрышей каждого игрока имеет локальный (но не обязательно глобальный) максимум на множестве стратегий этого игрока. Функции выигрышей являются квазивогнутыми только при $\gamma \in [0, 1]$. При $\gamma \in (1, 2]$ выигрыши не являются квазивогнутыми (рис. 1.11), но равновесие существует: квазивогнутость функций выигрышей является достаточным (но не необходимым) условием существования равновесия.

Тем не менее равновесие при $\gamma \in (1, 2]$ существует: квазивогнутость функций выигрышей является достаточным (но не необходимым) условием существования равновесия.

Что же происходит? При борьбе за приз оба игрока тратят значительные ресурсы. Например, при $\gamma = 1$, что соответствует обычной лотерее, общий объем затрачиваемых ресурсов будет равен половине от стоимости ресурса. Можно показать (см. задачу 1.30), что при увеличении числа игроков общий объем затрат на лоббирование стремится к ценности самого приза, за который ведется борьба (R в нашей модели). Также объем ресурсов, затрачиваемых на состязательную деятельность, возрастает при улучшении

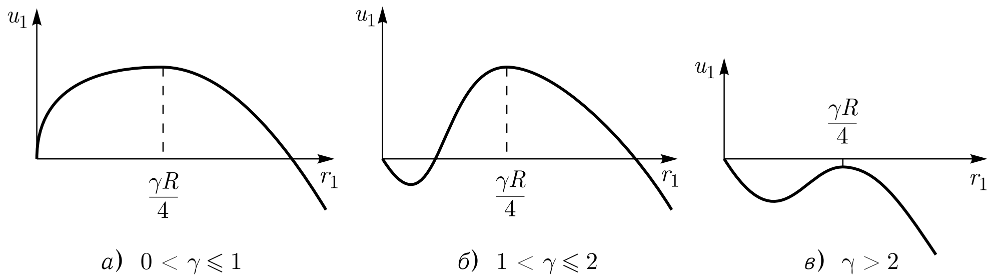


Рис. 1.11. Функция выигрышей игрока 1 в игре «борьба за ренту» при условии, что $r_2 = \dfrac{\gamma R}{4}$

технологии лоббирования (величины γ). Все это — свидетельство того, что при отсутствии прозрачных механизмов распределения лицензий на ведение многих прибыльных видов экономической деятельности (импортные квоты, строительство в условиях ограниченного предложения земли и т.д.) общество несет значительные (и часто невидимые стороннему наблюдателю) потери.

Конкуренция на рынке с горизонтально дифференцированным товаром. Вот пример, восходящий к классической работе Гарольда Хотеллинга [Hotelling, 1929]. На южном морском курорте есть пляж длиной 1 км. На пляже расположены отдыхающие. Будем считать, что отдыхающих — континуум, а их общая масса равна единице. Будем считать, что отдыхающие распределены равномерно: т.е. для каждого $x \in [0, 1]$ доля отдыхающих с координатами $v \leqslant x$ равна x. На пляже находятся два продавца с мороженым. Стратегия каждого продавца i — координата $s_i \in [0, 1]$ расположения тележки, с которой он продает мороженое. Цена у обоих продавцов одинаковая и не зависит от их местоположения.

Предположим, что каждый покупатель в течение дня купит ровно один стакан мороженого. При этом покупатель купит мороженое у того продавца, чья тележка расположена ближе. В случае, если продавцы равноудалены от покупателя, он с равной вероятностью выберет любого из двух продавцов. Пусть выигрыш продавца равен доле покупателей, которые приобрели у него мороженое. Таким образом, выигрыш продавца $i = 1, 2$ равен

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} \dfrac{s_1 + s_2}{2}, & s_1 < s_2, \\ 1/2, & s_1 = s_2, \\ 1 - \dfrac{s_1 + s_2}{2}, & s_1 > s_2. \end{cases} \tag{1.53}$$

Выигрыш второго продавца определяется аналогично. Распределение покупателей между продавцами показано на рис. 1.12.

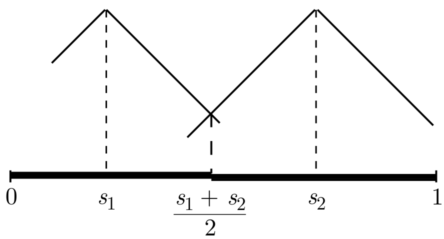


Рис. 1.12. Горизонтальная конкуренция и доли рынка продавцов

На этом рисунке показаны графики двух функций: выигрыш покупателя с данным расположением при покупке у первого и второго продавцов. Покупатель с расположением $(s_1+s_2)/2$ безразличен к выбору между двумя продавцами; при $s_1 < s_2$ все покупатели с расположением $v < (s_1+s_2)/2$ приобретут мороженое у продавца 1, все покупатели с расположением $v > (s_1+s_2)/2$ — у продавца 2.

Легко проверить, что в этой игре существует единственное равновесие, в котором $s_1 = s_2 = 1/2$. Действительно, в равновесии мы не можем иметь $s_1 \neq s_2$. Если без потери общности, $s_1 < s_2$, то любой продавец i может увеличить свой выигрыш, взяв $s_i' \in (s_1, s_2)$. Следовательно, в равновесии $s_1 = s_2 = s$. Но если $s > 1/2$, то любой продавец сможет увеличить свой выигрыш, взяв $s_i' \in (s, 1-s)$; то же самое верно при $s < 1/2$. Таким образом, мы должны ожидать, что тележки продавцов расположатся рядом, причем их положение будет совпадать с расположением *медианного* покупателя, т.е. такого, что равное число покупателей располагается справа и слева от него.

История с двумя продавцами мороженого — хорошая метафора для рынка с *горизонтально дифференцированным товаром*, или *горизонтальной конкуренции*. Например, главный параметр, по которому отличаются друг от друга современные пассажирские самолеты — это соотношение стоимости самолета и удельных издержек перевозки одного пассажира. С одного конца спектра мы имеем небольшие региональные самолеты; с другого — вместительные и дорогие авиалайнеры, но с низкими эксплуатационными расходами в расчете на одного пассажира. Авиакомпании — потребители самолетов — тоже отличаются друг от друга отчасти по тому, какие самолеты им нужны. Одни компании обслуживают большое число маршрутов с небольшим пассажиропотоком; для таких компаний предпочтительны небольшие самолеты. Другие авиакомпании, эксплуатирующие более загруженные маршруты, предпочтут закупать вместительные самолеты.

Модель предвыборной конкуренции. Модель горизонтальной конкуренции используется при моделировании поведения политических партий или кандидатов на выборах, начиная с известной книги американского политолога Энтони Даунса [Downs, 1957]. Предположим, что в некоторой стране президентский пост оспаривают два кандидата. Стратегией каждого кандидата является его предвыборная программа. Будем считать, что программа описывается одним параметром — степенью ее левизны или правизны. Левая политика означает высокие налоги, значительные затраты на производство общественных благ и социальные программы (такие, как пенсии или помощь малоимущим) за счет налогов, собранных с более состоятельных граждан. Правая политика — низкие налоги и малые затраты на социальную сферу. Пусть $s_1, s_2 \in [0,1]$ — политические программы кандидатов, где $s = 0$ — крайне левая программа, $s = 1$ — крайне правая.

Выигрыш кандидата равен доле голосов избирателей, полученных им на выборах. Пусть для каждого избирателя существует величина $v \in [0,1]$ — политическая программа, которая больше всего ему нравится, или его *наилучшая альтернатива*. Избиратели отличаются друг от друга своими предпочтениями относительно политических программ. Например, наилучшая альтернатива человека со средним достатком будет правее наилучшей альтернативы мало зарабатывающего пенсионера, но левее, чем наилучшая альтернатива бизнесмена. Предположим, что наилучшие альтернативы избирателей равномерно распределены на $[0,1]$.

Будем считать, что избиратель v проголосует за кандидата 1 в том случае, если $|s_1 - v| < |s_2 - v|$ и проголосует за кандидата 2 при $|s_1 - v| \geqslant |s_2 - v|$. В таком случае модель политической конкуренции между двумя кандидатами ничем не будет отличаться от конкуренции между двумя продавцами мороженого, рассмотренной в предыдущем примере. В равновесии оба кандидата станут центристами: $s_1^* = s_2^* = 1/2$. В более общей постановке, когда наилучшие альтернативы избирателей распределены на $[0,1]$ с функцией распределения $F(\cdot)$, т.е. если доля избирателей с наилучшими альтернативами $v \leqslant x$ равна $F(x)$, в равновесии предвыборные программы избирателей будут $s_1^* = s_2^* = F^{-1}(1/2) = v^m$, где программа v^m является наилучшей альтернативой *медианного избирателя*, т.е. это такая альтернатива, что одна половина избирателей имеет более левые взгляды, а другая половина — более правые.

Модель предвыборной конкуренции с идейными кандидатами. В середине 1950-х годов, когда политологи впервые попытались объяснить поведение кандидатов на выборах при помощи теоретико-игровых моделей, полученный выше результат (согласно которому в ходе избирательной кампании оба кандидата принимают одну и ту же политическую программу) достаточно хорошо соответствовал реальной политической обстановке. В США (а именно там была сосредоточена деятельность значительной части исследователей) программы представителей двух основных политических партий — республиканцев и демократов — не слишком сильно отличались друг от друга по основным вопросам, касающимся национальной экономики. В частности, большинство республиканцев приняло так называемый «Новый курс» президента от демократической партии Франка Рузвельта, предполагавший значительное перераспределение доходов от более состоятельных граждан к бедным. Однако на протяжении последующих десятилетий позиция республиканцев поменялась; она стала в значительной мере отражать интересы наиболее обеспеченной части населения. Наблюдавшееся расхождение политических программ партий (и кандидатов, которые представляли их на выборах) бросило вызов ученым: как можно при помощи формальной логики объяснить наблюдавшиеся тенденции? Очевидно, что предпосылок, заложенных в самую простую модель политической конкуренции, описанную выше, было недостаточно.

Возможное объяснение состоит в том, что сами кандидаты могут быть заинтересованы в реализации каких-то конкретных политических программ. Такая модель была рассмотрена в работах Уиттмена [Wittman, 1977] и Кальверта [Calvert, 1985]. Обозначим через $a_i \in [0,1]$ наилучшую альтернативу кандидата $i = 1, 2$ (которая является параметром модели). Пусть, как и раньше, стратегия каждого кандидата i — его политическая программа $s_i \in [0,1]$ (которая может отличаться от a_i). Обозначим через p_i вероятность того, что кандидат i выиграет выборы, $p_i \geqslant 0$, $p_1 + p_2 = 1$. Пусть выигрыш кандидатов составляет

$$u_1 = \lambda p_1 - \big(p_1|a_1 - s_1| + p_2|a_1 - s_2|\big), \tag{1.54}$$

$$u_2 = \lambda p_2 - \big(p_1|a_2 - s_1| + p_2|a_2 - s_2|\big). \tag{1.55}$$

Здесь мы предполагаем, что кандидату небезразлична как сама победа на выборах, так и политическая программа победившего кандидата (кем бы он ни был). Второе слагаемое в функции выигрышей — ожидаемый ущерб кандидата i от реализации победителем программы, возможно отличающейся от его собственной наилучшей альтернативы a_i. Параметр $\lambda \in [0,1]$ отражает относительную важность победы на выборах по сравнению с реализацией наилучшей политической программы.

Осталось определить вероятности победы кандидатов p_1, p_2. Пусть кандидат побеждает на выборах только в том случае, когда он набирает больше половины голосов. Пусть $s_1 < s_2$. Избиратель с наилучшей альтернативой $\overline{v} = {(s_1 + s_2)}/{2}$ будет безразличен в выборе между программами двух кандидатов. Все избиратели с позициями $v < \overline{v}$ проголосуют за кандидата 1, с позициями $v > \overline{v}$ — за кандидата 2. Следовательно, при $v^m < \overline{v}$ побеждает кандидат 1, при $v^m > \overline{v}$ побеждает кандидат 2, при $v^m = \overline{v}$ каждый побеждает с вероятностью 1/2.

Предположим, что кандидаты знают об избирателях следующее: наилучшая альтернатива медианного избирателя — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\,b}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\,b}\right]$. Величина $b \geqslant 1$ отражает степень информированности кандидатов о своем электорате. Чем она выше, тем сильнее изменения политических программ влияют на вероятности победы p_1, p_2. Это предположение дает нам следующие вероятности побед кандидатов при $s_1 < s_2$:

$$p_1 = \begin{cases} 0, & \dfrac{s_1+s_2}{2} < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\,b}; \\ \dfrac{b\,(s_1+s_2-1)}{2} + \dfrac{1}{2}, & \dfrac{s_1+s_2}{2} \in \left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\,b}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\,b}\right]; \\ 1, & \dfrac{s_1+s_2}{2} > \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\,b}; \end{cases} \qquad p_2 = 1 - p_1. \tag{1.56}$$

Найдем равновесие в этой модели для $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Предположим, что в равновесии [14] $0 < s_1 < s_2 < 1$.

Мы обязаны иметь $\dfrac{s_1+s_2}{2} \geqslant \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\,b}$, иначе кандидат 2 может выбрать $s_2' > s_2$, при котором мы будем продолжать иметь $p_2 = 1$. Следовательно, кандидат 2 сможет увеличить свой выигрыш. Аналогично, в равновесии обязано выполняться $\dfrac{s_1+s_2}{2} \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\,b}$. Это дает нам следующие условия первого порядка максимизации выигрыша кандидатов:

$$\frac{\partial\,u_1}{\partial s_1} = -p_1 + (\lambda - s_1 + s_2)\,\frac{\partial\,p_1}{\partial s_1} = 0, \tag{1.57}$$

$$\frac{\partial\,u_2}{\partial s_2} = 1 - p_1 - (\lambda - s_1 + s_2)\,\frac{\partial\,p_1}{\partial s_2} = 0. \tag{1.58}$$

При $\lambda = 0$ получим

$$s_1^* = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\,b}, \qquad s_2^* = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\,b}. \tag{1.59}$$

Выходит так: чем выше b, тем ближе позиции кандидатов к ожидаемой позиции медианного избирателя $1/2$. Действительно, предположим, что кандидата i интересует только реализация программы, наиболее близкой к своей наилучшей альтернативе a_i. Кандидат стоит перед дилеммой. С одной стороны, чем ближе его позиция y_i к ожидаемой позиции медианного избирателя, тем выше вероятность, что он выиграет выборы. С другой стороны, это снижает его выигрыш в случае победы. Чем выше неопределенность относительно позиции медианного избирателя, тем ближе будет политическая программа кандидата к его наилучшей альтернативе. Отметим, что в пределе при $b \to \infty$ равновесные политические программы совпадут с наилучшей альтернативой медианного избирателя, несмотря на то, что в их функции выигрышей напрямую не входит победа на выборах. Это будет верно при любом $\lambda \in [0, 1]$ и при любых $a_1 < 1/2 < a_2$.

[14] Убедитесь самостоятельно, что в равновесии не может быть иначе.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ НЭША

Данное доказательство теоремы Нэша является неконструктивным. Мы показываем, что у некоторого точечно-множественного отображения (определяемого через наилучшую реакцию игроков на действия остальных) существует неподвижная точка. Та же идея используется и при доказательстве многих других результатов в теории игр.

Сформулируем сначала вспомогательный результат. Если S — некоторое множество, то через 2^S обозначим множество всех подмножеств S.

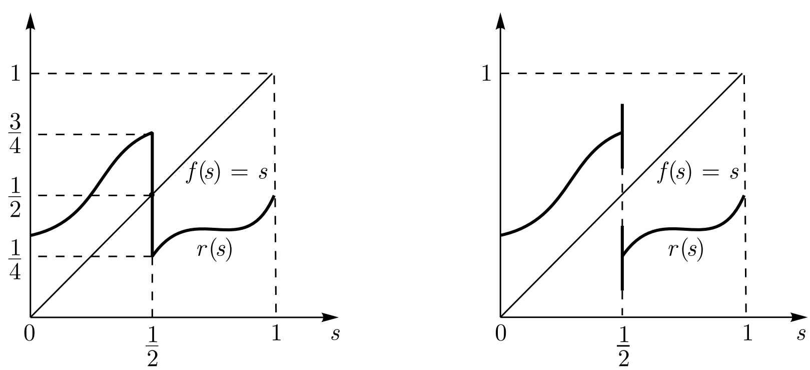
Теорема 1.4 [Kakutani, 1941]. *Пусть S — непустое, компактное и выпуклое подмножество евклидова пространства. Пусть $r\colon S \to 2^S$ — точечно-множественное отображение, такое что*

1. *$r(s)$ является непустым, выпуклым и компактным для всех $s \in S$.*
2. *$r(\cdot)$ имеет замкнутый график. То есть если $(s^n, \widehat{s}^n) \to (s, \widehat{s})$ — последовательность, такая что $\widehat{s}^n \in r(s^n)$ для всех n, то $\widehat{s} \in r(s)$.*

Тогда $r(\cdot)$ имеет неподвижную точку.

На рис. 1.13 представлены два примера точечно-множественных отображений. В обоих случаях $S = [0, 1]$. Функция $r(\cdot)$, изображенная на рис. 1.13, a, удовлетворяет всем условиям теоремы Какутани. Для $s \neq 1/2$ множества $r(s)$ состоят из единственного элемента, в то время как $r\left(1/2\right) = \left[1/4; 3/4\right]$. Это отображение имеет неподвижную точку $s^* = 1/2$, так как $1/2 \in r\left(1/2\right)$. Это видно из графика: именно в этой точке график $r(\cdot)$ пересекается с графиком функции $f(s) = s$.

На рис. 1.13, $б$ неподвижная точка отсутствует. Здесь $r\left(1/2\right) = [0{,}2; 0{,}4] \cup [0{,}6; 0{,}8]$, т.е. функция $r(\cdot)$ не является выпуклозначной. Это позволяет графику $r(\cdot)$ не пересекаться с $f(s) = s$.



a) Неподвижная точка существует $б$) Неподвижной точки не существует

Рис. 1.13. Существование неподвижной точки для точечно-множественного отображения

Теперь докажем теорему о существовании равновесия.

Доказательство теоремы 1.1. Рассмотрим игру в нормальной форме: $G = \langle I, S, u \rangle$. Определим функцию реакции игрока i для смешанных стратегий:

$$\check{\sigma}_i(\sigma) = \operatorname*{arg\,max}_{\sigma'_i \in \Delta^{|S_i|-1}} u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}). \tag{1.60}$$

Функции $\check{\sigma}_i(\sigma)$ определяют, какие смешанные стратегии максимизируют выигрыш игрока i при условии, что задан профиль смешанных стратегий остальных игроков. Функция реакции является точечно-множественным отображением, т.е. каждому профилю смешанных стратегий может соответствовать несколько стратегий игрока i, ибо максимальное значение выигрыша игрока i достигаться при разных σ_i. Определим точечно-множественное отображение

$$\check{\sigma}(\sigma) = \prod_{i=1}^{N} \check{\sigma}_i(\sigma). \tag{1.61}$$

Если σ^* является неподвижной точкой отображения $\check{\sigma}(\cdot)$, то σ^* — равновесие; действительно, для всех i в этом случае σ^*_i будет являться наилучшей реакцией игрока i на σ^*_{-i}. Нам остается показать, что $\check{\sigma}(\cdot)$ удовлетворяет условиям теоремы Какутани.

Множество профилей смешанных стратегий выпукло, так как оно является декартовым произведением симплексов. Так как функции выигрышей $u_i(\sigma)$ линейны по σ_i, то $\check{\sigma}_i(\sigma) \neq \varnothing$, так как любая линейная функция непрерывна, а непрерывная функция должна достигать максимума на компактном множестве. Следовательно, $\check{\sigma}(\sigma)$ непусто для всех профилей смешанных стратегий σ.

Покажем, что $\check{\sigma}(\sigma)$ выпукло. Действительно, пусть $\sigma', \sigma'' \in \check{\sigma}(\sigma)$. Тогда для всех $\lambda \in (0, 1)$ и для всех i получаем

$$u_i\big(\lambda\sigma'_i + (1-\lambda)\,\sigma''_i, \sigma_{-i}\big) = \lambda\, u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) + (1-\lambda)\, u_i(\sigma''_i, \sigma_{-i}). \tag{1.62}$$

Так как $u_i(\sigma', \sigma_{-i}) = u_i(\sigma'', \sigma_{-i})$, то

$$u_i\big(\lambda\,\sigma'_i + (1-\lambda)\,\sigma''_i, \sigma_{-i}\big) = u_i(\sigma', \sigma_{-i}) = u_i(\sigma'', \sigma_{-i}), \tag{1.63}$$

т.е. $\lambda\,\sigma'_i + (1-\lambda)\,\sigma''_i \in \check{\sigma}_i(\sigma)$, следовательно, $\lambda\,\sigma' + (1-\lambda)\,\sigma'' \in \check{\sigma}(\sigma)$.

Теперь покажем, что $\check{\sigma}(\cdot)$ имеет замкнутый график. Пусть это не так, т.е. существует последовательность $(\sigma^n, \widehat{\sigma}^n) \to (\sigma, \widehat{\sigma})$ такая, что $\widehat{\sigma}^n \in \check{\sigma}(\sigma^n)$ для всех n, но $\widehat{\sigma} \notin \check{\sigma}(\sigma)$. Тогда для некоторого i имеем $\widehat{\sigma}_i \notin \check{\sigma}_i(\sigma)$. Пусть $\sigma'_i \in \check{\sigma}_i(\sigma)$. Тогда существует $\varepsilon > 0$, такой, что

$$u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) > u_i(\widehat{\sigma}_i, \sigma_{-i}) + 3\,\varepsilon. \tag{1.64}$$

Так как u_i непрерывна по σ и $(\sigma^n, \widehat{\sigma}^n) \to (\sigma, \widehat{\sigma})$, то для достаточно большого n мы имеем

$$u_i(\sigma'_i, \sigma^n_{-i}) > u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) - \varepsilon > u_i(\widehat{\sigma}_i, \sigma_{-i}) + 2\,\varepsilon > u_i(\widehat{\sigma}^n_i, \sigma^n_{-i}) + \varepsilon. \tag{1.65}$$

Первое неравенство выполнено в силу того, что $u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}^n) \to u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$, третье — в силу $u_i(\widehat{\sigma}_i, \sigma_{-i}^n) \to u_i(\widehat{\sigma}_i, \sigma_{-i})$. Следовательно, $\widehat{\sigma}_i^n \notin \check{\sigma}_i(\sigma^n)$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, $\check{\sigma}(\cdot)$ имеет замкнутый график и удовлетворяет всем условиям теоремы Какутани. ■

1.4. ЗАДАЧИ

1.1. Рассмотрим следующую игру:

		Игрок 2		
		L	C	R
Игрок 1	u	4; 1	0; 0	0; 3
	s	1; 6	5; 5	4; 3
	d	2; 5	7; 3	6; 0

Найдите все равновесия Нэша (в чистых и смешанных стратегиях).

1.2. При записи антагонистических игр в матричной форме для каждой пары стратегий достаточно указать одно число — выигрыш первого игрока, выбирающего строки. Выигрыш второго игрока определяется автоматически как выигрыш первого игрока, взятый со знаком минус. Найдите все равновесия в следующей антагонистической игре:

		Игрок 2		
		L	C	R
Игрок 1	u	3	0	2
	s	5	1	4
	d	2	6	5
	g	3	5	5

1.3. Рассмотрим симметричную игру

		Игрок 2	
		X	Y
Игрок 1	X	0; 0	A; B
	Y	B; A	C; C

Симметричным равновесием в этой игре будем называть такое равновесие, в котором оба игрока играют X с равными вероятностями. При каких значениях параметров $B \neq 0$, $A \neq C$, мы имеем

(a) доминирующую стратегию у каждого игрока (дилемма заключенного)?

(b) два симметричных равновесия в чистых стратегиях и одно — в смешанных (координационная игра)?

(c) единственное равновесие в смешанных стратегиях («инспекция»)?

(d) два несимметричных равновесия в чистых стратегиях («лобовая атака»)?

Является ли данный список исчерпывающим? То есть верно ли, что приведенный список является классификацией игр 2×2 с симметричной матрицей выигрышей? Что будет, если мы откажемся от предположения, что $B \neq 0$, $A \neq C$?

1.4. Постройте пример игры 2×2, в которой есть равновесие $(1, 0)$, а также равновесием является $(0, q)$ для всех $q \in \left[{}^{1}\!/\!_{2}, 1\right]$.

1.5. Будем говорить, что функция $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ является *строго квазивогнутой*, если для всех x, y и $\alpha \in (0, 1)$ верно, что $f(\alpha x + (1-\alpha) y) > \min\{f(x), f(y)\}$. Пусть G — непрерывная игра, в которой для всех i функции выигрышей $u_i(s_i, s_{-i})$ — строго квазивогнуты по s_i. Докажите, что графики функций реакции $\check{s}_i(s_{-i})$ являются непрерывными по s_{-i}.

1.6. Рассмотрим игру с нулевой суммой между двумя игроками, в которой первый игрок использует две стратегии, а второй — три или больше ($M \geqslant 3$), причем выигрыши игроков разные для разных профилей стратегий. Каково максимальное число чистых стратегий, которые могут входить в равновесную смешанную стратегию 2-го игрока?

1.7. Докажите, что если чистая стратегия s_i является доминируемой (сильно или слабо), то любая смешанная стратегия, в которую s_i входит с положительным весом, также является доминируемой.

1.8. Докажите, что в задаче с контролером и безбилетником (см. с. 45) существует единственное равновесие: $p = q = \left(\frac{1}{K}, \ldots, \frac{1}{K}\right)$.

1.9. Докажите лемму 1.7.

1.10. Докажите, что каждая вогнутая функция является квазивогнутой и что каждая монотонная функция одной переменной является квазивогнутой.

1.11. Докажите, что при итеративном удалении строго доминируемых стратегий множество S^∞ не зависит от порядка игроков, доминируемые стратегии которых мы удаляем.

1.12. N человек решают, как провести вечер. Каждый выбирает, к кому из своих $N - 1$ друзей отправиться в гости или же остаться дома и самому ждать гостей. Выигрыш игрока, оставшегося дома, равен числу пришедших гостей. Выигрыш каждого гостя на μ меньше ($\mu > 0$). Выигрыш человека, не заставшего хозяина дома, равен $-\mu$. Постройте математическую модель данной ситуации в виде игры в нормальной форме. Найдите все равновесия Нэша в чистых стратегиях в зависимости от μ при N, равном 3. А что будет при произвольном N?

1.13. Два джентльмена решили устроить дуэль. У каждого есть пистолет с одним патроном. По правилам дуэли оба соперника стоят в 40 шагах друг от друга и должны синхронно двигаться навстречу друг другу. В любой момент каждый из них может произвести выстрел. Вероятность того, что он попадет и убьет своего соперника, равна $p(x)$, где $x \in \{0, 1, \ldots, 20\}$ — число шагов, которое сделал дуэлянт. Пусть p — возрастающая функция, $p(0) = 0$, $p(20) = 1$. Каждый дуэлянт $i = 1, 2$ решает, на каком шаге $s_i \in \{0, 1, \ldots, 20\}$ ему сделать выстрел. Если один из дуэлянтов первым делает выстрел и промахивается, то оба дуэлянта продолжают двигаться друг навстречу другу, после чего другой дуэлянт убивает его в упор с вероятностью 1 (вне зависимости от того, на каком шаге другой дуэлянт собирался выстрелить первым). Если дуэлянты решили стрелять одновременно, выстрел все равно делает один из двух дуэлянтов (первый и второй стреляют с равными вероятностями). Если выстреливший промахнулся, то они продолжают двигаться друг к другу, после чего промахнувшегося убивает другой дуэлянт. Найдите равновесие в этой игре, если известно, что выигрыш дуэлянта равен 0, если он умер, и 1, если он выжил.

1.14. Вы ехали с работы домой на своем автомобиле, когда загорелась красная лампочка «проверьте двигатель». Вы повезли машину в мастерскую. Вам известно, что с вероятностью p у вас серьезная поломка, требующая замены двигателя; с вероятностью $1 - p$ у вас всего лишь испортился датчик системы диагностики. Вы показали машину механику, который (в отличие от вас) может определить истинную причину неисправности. У механика есть две стратегии: вести себя честно (т.е. рекомендовать замену двигателя, если нужно заменить двигатель, и рекомендовать замену датчика, если нужно заменить датчик), и вести себя нечестно (т.е. всегда рекомендовать замену двигателя). Зарплата механика составит r, если ремонт соответствует поломке, и $R > r$ если он заменит двигатель при сломанном датчике (так как он может продать ваш двигатель «налево»). У вас тоже две стратегии. Во-первых, вы можете всегда доверять механику (и согласиться на ремонт в любом случае). Во-вторых, вы можете не доверять — т.е. соглашаться на ремонт, только если механик предлагает заменить датчик. Стоимость ремонта составляет C для замены двигателя и $c < C$ для замены датчика. Если вы отказываетесь от услуг механика, то ваши издержки равны c' в том случае, если у вас сломался датчик, и C' в том случае, если у вас сломался двигатель. Пусть $c < c' < C < C'$.

(a) Формализуйте эту ситуацию как игру 2×2 и найдите равновесие.

(b) Что еще вам напоминает эта игра?

1.15. Полковник Блотто командует тремя отрядами. Перед ним расположены три высоты. Он должен решить, сколько отрядов послать на захват каждой высоты. Его противник, граф Балони, также имеет в подчинении три отряда и должен принять аналогичное решение. Если на одной из высот у одного противника есть численное превосходство, то он захватывает эту высоту. Если нет, то высота остается нейтральной территорией. Выигрыш каждого игрока равен количеству захваченных им высот, минус количество высот, захваченных противником.

(a) Сколько чистых стратегий у каждого игрока? Какие будут равновесия?

(b) Как изменится ваш ответ, если у Блотто четыре отряда, а у Балони — три? Если у каждого полководца по четыре отряда?

1.16. Три избирателя, 1-й, 2-й и 3-й, решают, за кого из трех кандидатов, A, B или C, следует проголосовать. Для победы кандидату необходимо получить минимум 2 голоса. Если все кандидаты набирают поровну голосов, то побеждает кандидат A. Функции выигрышей избирателей выглядят так: $u_1(\mathrm{A}) > u_1(\mathrm{B}) > u_1(\mathrm{C})$, $u_2(\mathrm{B}) > u_2(\mathrm{C}) > u_2(\mathrm{A})$, $u_3(\mathrm{B}) > u_3(\mathrm{A}) > u_3(\mathrm{C})$.

(a) Найдите все равновесия Нэша.

(b) Найдите все равновесия Нэша, в которых избиратели не голосуют за свои наихудшие альтернативы.

(c) Существуют ли *сильные равновесия Нэша*? Сильным равновесием называется такой профиль стратегий s, что не существует подмножества игроков $I' \subseteq I$ и профиля стратегий s', таких, что

i. $s'_i = s_i$, если $i \notin I'$, и

ii. $u_i(s') > u_i(s)$ для всех $i \in I'$.

То есть сильное равновесие устойчиво по отношению как к групповым, так и к индивидуальным отклонениям.

1.17. [Basu, 1994]. У двух авиапассажиров, следовавших одним рейсом, пропали чемоданы. Авиакомпания готова возместить ущерб каждому пассажиру. Для того чтобы определить размер компенсации, каждого пассажира просят сообщить, во сколько он оценивает содержимое своего чемодана. Каждый пассажир может назвать целочисленную сумму размером не менее 2 долл. и не более 100 долл. Условия компенсации таковы: если оба сообщают одну и ту же сумму, то каждый получит эту сумму в качестве компенсации. Если же заявленный одним из пассажиров ущерб окажется меньше, чем заявленный ущерб другого пассажира, то каждый пассажир получит компенсацию, равную меньшей из заявленных сумм. При этом тот, кто заявил меньшую сумму, получит дополнительно 2 долл., тот, кто заявил бóльшую сумму — дополнительно потеряет 2 долл.

(a) Найдите равновесие Нэша.

(b) Повторите решение, последовательно удаляя доминируемые стратегии. Почему вы думаете, что в реальности стратегии пассажиров будут отличаться от равновесных?

1.18. [Aragones, Palfrey, 2004]. В стране N проходят президентские выборы. В них участвуют два кандидата — сильный и слабый. Стратегией кандидата является его предвыборная программа — левая L, центристская C или правая R. Матрица выигрышей такова:

		Слабый		
		L	C	R
Сильный	L	$1;\ 0$	$\alpha;\ 1-\alpha$	$1-\alpha;\ \alpha$
	C	$1-\alpha;\ \alpha$	$1;\ 0$	$1-\alpha;\ \alpha$
	R	$1-\alpha;\ \alpha$	$\alpha;\ 1-\alpha$	$1;\ 0$

Здесь $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Если слабый кандидат выберет ту же стратегию, что и сильный, то проиграет вчистую; если выберет другую, то проиграет с меньшим отрывом (что лучше) или даже может выиграть. Найдите равновесие.

1.19. Нефтяная компания X в трех регионах имеет монополию на поставку бензина. Компания Y собирается построить сеть своих заправок в одном из этих регионов; компания X намерена ей помешать. Компания Y выбирает, в каком из регионов строить заправки; компания X выбирает, в каком из регионов бороться с компанией Y путем административного ресурса. Если компания Y выбрала регион i, а компания X — другой регион, то Y выигрывает v_i, X проигрывает ту же величину. Если обе компании выбрали одинаковые регионы, то каждая получает нулевой выигрыш. Найдите равновесие в смешанных стратегиях при условии, что $v_1 > v_2 > v_3 > 0$.

1.20. Дана игра в нормальной форме:

$$G = \Big\langle \{1,2\},\ \{X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}\},$$
$$\{u_1 = -x^2 - x\,y + \beta\,x,\ u_2 = -y^2 + \alpha\,x\,y + y\}\Big\rangle,$$

здесь $x \in X$ — стратегия первого игрока, $y \in Y$ — стратегия второго. При каких значениях параметров α и β существует равновесие по Нэшу? При каких значениях параметров оно будет единственным? В каком случае в равновесии будет максимизирован суммарный выигрыш игроков?

1.21. Пусть $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ — некий профиль стратегий в следующей игре:

$$\Big\langle \{1,2\},\ X \times Y,\ (f(x,y), g(x,y)) \Big\rangle.$$

Будем говорить, что на профиле x_0, y_0 выполнены *условия индивидуальной рациональности для игроков*, если:

$$f(x_0,y_0) \geqslant \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y), \qquad g(x_0,y_0) \geqslant \max_{y\in Y}\min_{x\in X} g(x,y).$$

(a) Поясните смысл этих условий. Выполняются ли они для равновесия по Нэшу?
(b) Выполняются ли эти условия, если (x_0, y_0) — оптимум по Парето?

1.22. N избирателей должны выбрать одну из K альтернатив. Для каждого избирателя существует наилучшая альтернатива, следующая наилучшая, и т.д. Действует правило одобряющего голосования, при котором каждый из избирателей может проголосовать за любое число альтернатив. Побеждает та альтернатива, которая набрала большинство голосов. Докажите, что любая стратегия голосования, при которой избиратель не голосует за наилучшую альтернативу или голосует за наихудшую, является слабо доминируемой.

1.23. Рассмотрим конечную игру в нормальной форме $G = \langle I, S, u \rangle$ и последовательность множеств смешанных стратегий $(S^0, S^1, \ldots)$, такую, что
(a) $S^0 = S$,
(b) S^n получается из S^{n-1} (для всех $n \geqslant 1$) путем удаления (для одного или нескольких игроков) всех строго доминируемых чистых стратегий (в том числе и тех стратегий, которые доминируются смешанными стратегиями).

Покажите, что
(a) $\widetilde{S}^\infty$ — предельный элемент последовательности $S^1, \ldots$ — не зависит от порядка, в котором удалялись доминируемые стратегии,
(b) $\widetilde{S}^\infty$ содержит в себе все равновесия Нэша. Если $\widetilde{S}^\infty$ содержит единственный элемент, то это — единственное равновесие Нэша.

1.24. На необитаемом острове живут два туземца. Их единственное богатство — бананы. У каждого туземца i имеется w_i бананов, $w_i = 4$. Каждый туземец может либо съесть банан, либо принести его в жертву местному божку, ответственному за хорошую погоду на острове. Пусть x_i — количество съеденных бананов, g_i — количество бананов, принесенных в жертву. Выигрыш каждого туземца равен $u_i = \ln x_i + \ln(g_1 + g_2)$.
(a) Выпишите максимизационную задачу каждого туземца.
(b) Найдите функции реакции.
(c) Найдите равновесие Нэша.
(d) Будет ли равновесие Парето-оптимальным? То есть можно ли выбрать такие x_1, x_2, g_1, g_2, что выигрыш обоих туземцев будет выше, чем в равновесии Нэша? Сформулируйте задачу максимизации $u_1 + u_2$ и решите ее. В каком случае $g_1 + g_2$ будет выше? Прокомментируйте результат.

1.25. [Osborne, Slivinski, 1996]. В некоторой стране живет континуум граждан с наилучшими альтернативами, равномерно распределенными на $[0, 1]$ (см. пример на с. 59). Каждый гражданин решает, стоит ли ему выдвинуть свою кандидатуру на предстоящих президентских выборах. Если гражданин с наилучшей альтернативой v выдвигается и становится кандидатом, то v автоматически становится его избирательной программой (например, потому, что избиратели не будут верить никаким другим его обещаниям). На выборах каждый избиратель голосует за кандидата с самой близкой к нему избирательной программой. Победителем становится кандидат, набравший больше голосов, чем любой другой кандидат (т.е. действует правило *относительного большинства*). Если гражданин с наилучшей альтернативой v решил стать кандидатом и выиграл выборы, его выигрыш равен

$$u_v = b - c, \tag{1.66}$$

где c — стоимость выдвижения, b — ценность победы. Если гражданин выдвинул свою кандидатуру, но проиграл, его выигрыш составит

$$u_v = -|y - v| - c, \tag{1.67}$$

где y — программа победившего кандидата. Если кандидат разделил первое место с $k-1$ другими кандидатами, то его выигрыш будет

$$u_v = \frac{1}{k} \sum_{i:\ V_i = \max\limits_j V_j} |y_i - v| + \frac{b}{k} - c, \tag{1.68}$$

здесь V_i обозначает долю голосов, поданых за кандидата i, так как мы предполагаем, что в таком случае каждый становится победителем с вероятностью $^1\!/_k$. Если гражданин решил не становиться кандидатом, то его выигрыш составит

$$u_v = -|y - v| \tag{1.69}$$

в том случае, если первое место на выборах досталось одному кандидату с программой y, и

$$u_v = -\frac{1}{k} \sum_{i:\ V_i = \max\limits_j V_j} |y_i - v|, \tag{1.70}$$

если первое место разделили k кандидатов с программами y_i. Если не выдвигается ни один кандидат, то все избиратели получают выигрыш $-\infty$.

(a) При каких значениях b, c существует равновесие, в котором выдвигается ровно один кандидат? Какой будет программа этого кандидата?

(b) При каких значениях b, c существует равновесие, в котором выдвигаются два кандидата? Какими будут их программы?

1.26. На рынке мобильной телефонной связи присутствуют две фирмы. Предположим, что фирмы конкурируют друг с другом путем объявления цен p_1, p_2 (в рублях за минуту) на свои услуги. Фирма $i = 1, 2$ дальше обязуется обслужить всех клиентов, желающих приобрести ее услуги по ее цене p_i. Пусть рыночный спрос задан как $q = 1 - p$, где p — наименьшая из предложенных цен, q — количество услуг, приобретенных покупателями. Таким образом, количество услуг, приобретенных у фирмы $i = 1, 2$, равно

$$q_i = \begin{cases} 1 - p_i, & p_i < p_{-i}; \\ \dfrac{1 - p_i}{2}, & p_i = p_{-i}; \\ 0, & p_i > p_{-i}. \end{cases}$$

Выигрыш фирмы i равен ее прибыли:

$$u_i = q_i p_i - c(q_i),$$

где $c(q_i)$ — издержки фирмы i. Такая модель конкуренции, когда фирмы объявляют цены, а затем берут на себя обязательства удовлетворять весь спрос по этим ценам, называется *моделью конкуренции Бертрана*.

(a) Найдите равновесие, если $c(q_i) = c_i q_i$, где $0 \leqslant c_1 \leqslant c_2$.

(b) Найдите равновесие, если $c(q_i) = a\dfrac{q_i^2}{2}$, $a > 0$. Будет ли равновесие единственным?

1.27. Найдите равновесие в модели дуополии Курно (с. 25–27) при условии, что функция спроса задана как $p = 1 - q_1 - q_2$ и прибыль фирмы i равна $q_i p - c_i(q_i)$, где

(a) издержки фирм квадратичны: $c_i(q_i) = c_i q_i^2$, где $c_i \geqslant 0$,

(b) предельные издержки постоянны, но есть фиксированные издержки: $c_i(q_i) = f_i + c_i q_i$ при $q_i > 0$ и $c_i(0) = 0$, где $f_i \geqslant 0$.

1.28. В модели дуополии Курно (с. 25–27) докажите, что равновесие является устойчивым, т.е. если мы рассмотрим последовательность (q_1^t, q_2^t), такую, что $q_1^{t+1} = \check{q}_1(q_2^t)$ и $q_2^{t+1} = \check{q}_2(q_1^t)$, то эта последовательность сойдется к (q_1^*, q_2^*).

1.29. В задаче конкуренции продавцов мороженого на пляже (см. с. 57):

(a) Докажите, что если продавцов трое, то равновесия в чистых стратегиях не существует.

(b) Найдите равновесие, если продавцов четверо, пятеро или шестеро, или докажите, что равновесий не существует.

(c) Пусть множество покупателей (и множество стратегий каждого продавца) — единичная окружность (например, продавцы конкурируют на пляже вокруг озера). Опишите все равновесия, когда продавцов двое или трое.

1.30. Каждая из N фирм решает, сколько средств следует вложить в разработку новой технологии обработки данных. Пусть r_i — количество средств, затраченное фирмой i. Пусть

$$p_i = \frac{r_i}{\sum_{j=1}^{N} r_j} \tag{1.71}$$

есть вероятность того, что фирма i успеет первой получить патент на изобретение. Ожидаемый выигрыш фирмы i будет

$$u_i = R p_i - r_i, \tag{1.72}$$

где R — ценность патента для его обладателя.

(a) Найдите, чему равны r_i^* в равновесии. Как r_i^* зависит от N?
(b) Как суммарные расходы $\sum_i r_i$ будут зависеть от N?
(c) Предположим, что издержки входа на рынок равны $c \geqslant 0$. Чему будет равно N?

1.31. [Nash, 1953]. Есть покупатель и продавец некого товара. Покупатель оценивает товар в $v \in [0, 1]$ единиц, продавец — в $c \in [0, 1]$ единиц. Покупатель и продавец одновременно называют цену, по которой они хотят купить/продать товар. Пусть p_1 — цена продавца, p_2 — цена покупателя. Обмен происходит только тогда, когда $p_1 \leqslant p_2$, и проводится по цене $p = (p_1 + p_2)/2$. Найдите равновесие. Правда ли, что в равновесии будет максимизирована сумма выигрышей продавца и покупателя?

1.32. [Palfrey, Rosenthal, 1984]. N человек решают, стоит ли им производить общественное благо. Решение каждого человека i есть $d_i \in \{0, 1\}$ — стоит ли участвовать в производстве блага или нет. Выигрыш каждого человека в том случае, когда благо произведено, равен 1, а в том случае, когда благо не произведено — 0. Дополнительно к этому человек, участвующий в производстве блага, несет издержки $c < 1$. Пусть для производства блага необходимо, чтобы $1 \leqslant K < N$ человек участвовало в производстве. Найдите все равновесия в чистых стратегиях. Найдите симметричное равновесие в смешанных стратегиях. Почему равновесия в смешанных стратегиях могут выглядеть предпочтительней? Есть ли еще равновесия в этой игре?

1.33. В некоторой стране проходят президентские выборы, в которых участвуют два политика: A и B. Каждый политик решает, какую программу ему предложить избирателям. Пусть $y_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{B}} \in [0, 1]$ — избирательные программы политиков. Можно считать, что 0 — это крайне левая программа («все отнять и поделить»), 1 — крайне правая (никаких налогов, пусть каждый тратит только то, что зарабатывает). В стране существует континуум избирателей; каждый избиратель представлен своей наилучшей альтернативой v. Наилучшие альтернативы равномерно распределены на отрезке $[0,1]$. Пусть выигрыш избирателя с наилучшей альтернативой v в случае избрания кандидата А равен $u_{\mathrm{A}}(v) = e - (v - y_{\mathrm{A}})^2$, где $e > 0$. В случае избрания кандидата В его выигрыш будет $u_{\mathrm{B}}(v) = -(v - y_{\mathrm{B}})^2$. То есть каждый избиратель предпочитает, чтобы политическая программа кандидата была по возможности ближе к собственной наилучшей альтернативе. При этом кандидат А обладает дополнительным преимуществом; при прочих равных условиях, избиратель, голосующий за этого кандидата, получает дополнительный выигрыш e по сравнению с другим кандидатом (источником этого преимущества может быть, например, управленческий опыт или бóльшая известность). Предположим, что выигрыш каждого кандидата равен доле избирателей, которая за него голосует. Иначе говоря, если все избиратели с наилучшей альтернативой $v \leqslant 0{,}7$ голосуют за кандидата А и все избиратели с $v > 0{,}7$ — за кандидата В, то выигрыш кандидатов будет, соответственно, $U_{\mathrm{A}} = 0{,}7$ и $U_{\mathrm{B}} = 0{,}3$.

(a) Найдите, при каком $\overline{v}$ мы будем иметь $u_{\mathrm{A}}(\overline{v}) = u_{\mathrm{B}}(\overline{v})$ при данных y_{A}, y_{B}? За какого кандидата будут голосовать избиратели с наилучшей альтернативой $v < \overline{v}$? С наилучшей альтернативой $v > \overline{v}$?

(b) Покажите, что при $e \geqslant 1/4$ в данной игре существует равновесие в чистых стратегиях. Найдите все такие равновесия. Чему будет равен равновесный выигрыш кандидатов?

(c) Покажите, что при $e < 1/4$ равновесие в чистых стратегиях не существует.

(d) Пусть $e < 1/4$. Предположим, что кандидат В реализует смешанную стратегию, в которой с вероятностью $1/2$ выбирается либо $1/2 - \sqrt{e}$, либо $1/2 + \sqrt{e}$. Покажите, что $y_{\mathrm{A}} = 1/2$ максимизирует выигрыш кандидата А при данной смешанной стратегии кандидата В. Покажите, что кандидат В также не может получить больший выигрыш, если $y_{\mathrm{A}} = 1/2$.

1.34. В некоторой стране проходят президентские выборы, в которых участвуют два политика: 1-й и 2-й. Каждый политик решает, какую программу ему предложить избирателям. Пусть $y_A, y_B \in [0,1]$ — политические программы политиков. В стране живет континуум избирателей. Наилучшие альтернативы избирателей равномерно распределены на $[0,1]$. Пусть $u(v,y) = -|v - y|$ будет выигрыш избирателя с наилучшей альтернативой $v \in [0,1]$ при голосовании за кандидата с позицией y. Выигрыш кандидата равен доле избирателей, проголосовавших за него, от общего числа избирателей. Найдите все равновесия Нэша в следующих двух случаях.

(a) Избиратель с наилучшей альтернативой v голосует следующим образом:

i. За кандидата 1, если $u(v, y_1) > u(v, y_2)$ и $|u(v, y_1) - u(v, y_2)| \geqslant b$, где $0 < b < 1/2$.
ii. За кандидата 2, если $u(v, y_1) < u(v, y_2)$ и $|u(v, y_1) - u(v, y_2)| \geqslant b$.
iii. Не голосует, если $|u(v, y_1) - u(v, y_2)| < b$.

То есть избиратель не голосует, если он в достаточной степени безразличен в выборе между двумя кандидатами.

(b) Избиратель с наилучшей альтернативой v голосует следующим образом:

i. За кандидата 1, если $u(v, y_1) > u(v, y_2)$ и $u(v, y_1) \geqslant c$, где $-1/2 \leqslant c \leqslant -1/4$.
ii. За кандидата 2, если $u(v, y_1) < u(v, y_2)$ и $u(v, y_2) \geqslant c$.
iii. Не голосует, если $\max\{u(v, y_1), u(v, y_2)\} < c$.

То есть избиратель не голосует, если ему достаточно сильно не нравятся оба кандидата.

1.35. [Selten, Pool, 1991]. По соседству расположены два государства населением V_1 и V_2, в каждом государстве проживает большое число граждан. Пусть $V_1 \geqslant V_2$. Граждане каждого государства говорят на своем национальном языке. Рассмотрим однопериодную игру, в которой гражданин каждого государства принимает решение, следует ли ему выучить язык другого государства. Например, если он знает язык другого государства, то число людей, с которыми он может общаться, равно $V_1 + V_2$. Пусть выигрыш каждого гражданина равен числу людей (в обоих государствах), с которыми он может общаться. Если при этом он решил изучить иностранный язык, то он несет издержки $c > 0$ на изучение иностранного языка. Пусть P_1 и P_2 — доли граждан в каждом государстве, выучивших иностранный язык. Решение отдельно взятого гражданина не влияет на эти величины. Найдите равновесные P_1^* и P_2^* — такие, при которых ни один гражданин не желает пересматривать свое решение, учить ему иностранный язык или нет. Найдите оптимальные P_1^o и P_2^o — такие, которые максимизируют суммарное благосостояние граждан обоих государств. Почему они могут отличаться от равновесных значений?

1.36. [Gradstein, Kondar, 1999]. Четыре спортсмена готовятся к соревнованию по бегу. Каждый атлет i до начала соревнований решает, сколько усилий x_i может потратить на подготовку. Во время соревнований спортсмены не принимают никаких решений. Турнир состоит из двух этапов: полуфинала и финала. В полуфинале спортсмен 1 соревнуется со спортсменом 2 и спортсмен 3 со спортсменом 4. В финале бегут победители полуфиналов. Если i соревнуется с j (либо в полуфинале, либо в финале), то вероятность того, что i победит, есть $p_i(x_i, x_j) = \dfrac{x_i}{x_i + x_j}$.

(a) Пусть R — приз за первое место, r — приз за второе место. За третье и четвертое места приза нет. Выигрыш атлета i равен R, помноженному на вероятность получить первое место, плюс r, помноженному на вероятность получить второе место, минус x_i. Выпишите математические ожидания выигрышей для всех атлетов.

(b) Найдите симметричное равновесие Нэша в этой игре (т.е. такое, в котором $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x$. Существуют ли еще равновесия?

(c) Вы — устроитель турнира. Ваша задача — обеспечить его зрелищность, т.е. максимизировать $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ при данном размере призового фонда $r + R = \overline{R}$. Решите эту задачу.

(d) Что лучше для организатора турнира — такая схема или один забег, где участвуют все четыре спортсмена, вероятность победы каждого равна $p_i = \dfrac{x_i}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}$ и приз дается только за первое место?

1.37. [Murphy, Shleifer, Vishnu, 1993]. Население в стране N может заниматься одним из двух видов деятельности: работать либо воровать у тех, кто работает. Пусть $V \in [0, 1]$ — доля работающего населения. Пусть α — максимальный доход работающего человека, $\gamma < \alpha$ — его гарантированный доход. Таким образом, максимальная сумма, которую можно украсть у работающих, равна $(\alpha - \gamma)V$. Пусть β — максимальная сумма, которую один человек может украсть. Следовательно, всего может быть украдено не более $\beta(1 - V)$. Если $V > \beta/(\alpha + \beta - \gamma)$, то количество украденного будет меньше, чем $(\alpha - \gamma)V$; при $V \leqslant \beta/(\alpha + \beta - \gamma)$ оно будет равно $(\alpha - \gamma)V$.

(a) Как выигрыши работающего и ворующего зависят от V?

(b) Найдите равновесие в игре, в которой каждый человек решает, чем ему заняться в жизни: работой или воровством. Как количество равновесий будет зависеть от значений параметров? Почему, по-вашему, равновесий может быть два?

1.38. [Holmstrom, 1992]. Владелец мастерской нанял N работников. Количество товара, производимого мастерской, есть функция от усилий, прилагаемых работниками:

$$Y(q_1, \ldots, q_N) = \sqrt{q_1 + \ldots + q_N}\,,$$

где q_i — усилие, прилагаемое работником i. Пусть выигрыш каждого работника есть

$$u_i = W_i - q_i,$$

где W_i — зарплата работника; последнее слагаемое отражает издержки работника i.

(a) Пусть хозяин не имеет права ставить зарплату работника в зависимость от q_i. Зарплата каждого работника есть равная доля от выпуска: $W_i = Y/N$. Найдите равновесные объемы выпуска $q_1^*, \dots, q_N^*$. Найдите Парето-оптимальные объемы выпуска $q_1^o, \dots, q_N^o$, максимизирующие выпуск Y минус суммарные издержки $q_1 + \dots + q_N$. Почему равновесные усилия не равны оптимальным?

(b) Пусть теперь хозяин предлагает следующую схему оплаты:

$$W_i = Y(q_1, \dots, q_N) - \frac{N-1}{N} Y(q_1^o, \dots, q_{i-1}^o, q_i, q_{i+1}^o, \dots, q_N^o).$$

Будет ли такая схема оплаты Парето-оптимальной? Будет ли она сбалансированной, т.е. такой, что всегда выполняется $q_1 + \dots + q_N = Y$? Объясните, почему Парето-оптимальная схема оплаты не может быть сбалансированной.

1.39. [Acemoglu, Robinson, 2006]. В некоторой стране живут N капиталистов-товаропроизводителей. Они решают, сколько средств надо потратить на разгон профсоюза рабочих. Пусть $s_i \geqslant 0$ — количество средств, потраченных капиталистом i. Будем считать, что профсоюз удалось уничтожить, если $\sum_{i=1}^N s_i > \omega$, ω — случайная величина, распределенная на $[0, \infty)$ с ненулевой убывающей плотностью $f(\cdot)$ и функцией распределения $F(\cdot)$. Выигрыш капиталиста i составляет $R - s_i$, если профсоюз разогнан, и $-s_i$, если нет.

(a) Найдите условия первого порядка для равновесия Нэша.

(b) В стране принят закон в защиту профсоюзов. Теперь, чтобы разогнать профсоюз, капиталисты должны в сумме приложить усилия $\omega + \eta$, где $\eta > 0$ — детерминированная величина. Найдите условия первого порядка для равновесия Нэша. Изменится ли равновесная вероятность того, что профсоюз будет разогнан?

(c) Принят другой закон. Теперь, чтобы разогнать профсоюз, капиталисты должны в сумме приложить усилия $\alpha\omega$, где $\alpha > 1$. Как изменится ваш ответ?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 1

Бусыгин В.П., Желободько Е.В., Коковин С.Г., Цыплаков А.А. Микроэкономический анализ несовершенных рынков. Учеб. пособ. Ч.1. Новосибирск: НГУ, 2000.

Мюллер Д. Общественный выбор III. М.: ГУ ВШЭ, 2007.

Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.

Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.

Патнэм Р. Чтобы демократия сработала: Гражданские традиции в современной Италии. М.: Изд. фирма «Ad Marginem», 1996.

Печерский С.А., *Беляева А.А.* Теория игр для экономистов: Вводный курс. Учеб. пособ. СПб.: Изд-во Европейского ун-та в С.-Петербурге, 2001.

Шагин В.Л. Теория игр: С экон. прил. Учеб. пособ. М.: ГУ ВШЭ, 2003.

Acemoglu D., *Robinson J.A.* De Facto Political Power and Institutional Persistence // AEA Papers and Proceedings. 2006. Vol. 96. No. 2. P. 325–330.

Aragones E., *Palfrey Th.R.* The Effect of Candidate Quality on Electoral Equilibrium: An Experimental Study // The American Political Science Review. 2004. Vol. 98. No. 1. P. 77–90.

Basu K. The Traveler's Dilemma: Paradoxes of Rationality in Game Theory // American Economic Review. 1994. Vol. 84. No. 2. P. 391–395.

Bereford R.S., *Person M.H.* A Mixed Strategy in Action // Operations Research. 1955. Vol. 6. No. 4. P. 173–176.

Binmore K.G. Fun and Games: A Text of Game Theory. D.C. Hearth, 1992.

Calvert R.L. Robustness of Multidimensional Voting Model: Candidate Motivations, Uncertainty and Convergence // Americal Journal of Political Science. 1985. Vol. 29. P. 69–95.

Chiappori P.A., *Levitt S.*, *Groseclose T.* Testing Mixed-Strategy Equilibria When Players Are Heterogeneous: The Case of Penalty Kicks in Soccer // The American Economic Review. 2002. Vol. 92. No. 4. P. 1138–1151.

Davis D.D, *Holt C.A.* Experimental Economics. Princeton University Press, 1993.

Dixit A.K., *Skeath S.* Games of Strategy: 2nd edition. W.W. Norton & Company, 2004.

Downs A. An Economic Theory of Democracy. Harper & Row, 1957.

Fudenberg D., *Tirole J.* Game Theory. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1991.

Gibbons R. Game Theory for Applied Economists. Princeton University Press, 1992.

Glicksberg I.L. A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem, with Applications to Nash Equilibrium Points // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1952. Vol. 38. P. 170–174.

Gradstein M., *Kondar K.A.* Orchestrating Rent-Seeking Contests // Economic Journal. 1999. Vol. 109. P. 536–545.

Hindricks J., *Myles G.D.* Intermediate Public Economics. The MIT Press, 2006.

Holmstrom B. Moral Hazard in Teams // Bell Journal of Economics. 1982. Vol. 13. No. 2. P. 324–340.

Hotelling H. Stability in Competition // Economic Journal. 1929. Vol. 39. No. 153. P. 41—57.

Kakutani S. A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem // Duke Mathematical Journal. 1941. Vol. 8. No. 3. P. 457–459.

Krueger A.O. The Political Economy of the Rent-Seeking Society // The American Economic Review. 1974. Vol. 64. No. 3. P. 291–303.

MasCollel A., *Whinston M.D.*, *Green J.R.* Microeconomics Theory. Oxford University Press, 1995.

Murphy K.M., *Shleifer A.*, *Vishnu R.W.* Why is Rent-Seeking so Costly to Growth? // The American Economic Review. 1993. Vol. 83. No. 2. P. 40–414.

Myerson R.B. Game theory: Analysis of Conflict. Harvard University Press, 1991.

Nash J. Equilibrium Points in n-Person Games // Proceedings of the National Academy of Sciences. 1950. Vol. 36. No. 1. P. 48–49.

Nash J.E. Two-Person Cooperative Games // Econometrica. 1953. Vol. 21. No. 1. P. 128–140.

Osborne M.J., *Slivinski A.* A Model of Political Competition With Citizen-Candidates // Quarterly Journal of Economics. 1996. Vol. 111. P. 65–96.

Palfrey Th.R., *Rosenthal H.* Participation and the Provision of Public Goods: A Strategic Analysis // Journal of Public Economics. 1984. Vol. 24. No. 2. P. 171–193.

Posner R. The Social Costs of Monopoly and Regulation // The Journal of Political Economy. 1975. Vol. 83. No. 4.

Rubinstein A. Comments on the Interpretation of Game Theory // Econometrica. 1991. Vol. 59. No. 4. P. 909–924.

Schelling T.C. The Strategy of Conflict. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1960.

Selten R., *Pool J.* The Distribution of Foreign Language Skills as a Game Equilibrium / R. Selten (ed.) // Game Equilibrium Models. Vol. 4. Berlin: Springer-Verlag, 1991. P. 64–84.

Tullock G. The Welfare Costs of Tariffs, Monopolies, and Theft // Western Economic Journal. 1967. Vol. 5. No. 3. P. 224—232.

Walker M., *Wooders J.* Minimax play at Wimbledon // American Economic Review. 2001. Vol. 91. No. 5. P. 1521–1538.

Wittman D. Candidates With Policy Preferences: A Dynamic Model // Journal of Economic Theory. 1977. Vol. 14. P. 180–189.