УДК 330.101.542(075)
ББК 65.012.1
Ф88

Подготовлено при содействии НФПК —
Национального фонда подготовки кадров в рамках
программы «Совершенствование преподавания
социально-экономических дисциплин в вузах»

Рецензент:
декан факультета экономики Европейского университета
в Санкт-Петербурге доктор физико-математических наук
С.Л. Печерский

ISBN 978-5-7598-0335-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

МЫСЛИТЬ В ТЕРМИНАХ МИКРОЭКОНОМИКИ

Перед Вами, читатель, книга, которую давно ожидали в российских вузах. Это, пожалуй, первый подготовленный и изданный в нашей стране полный курс лекций по микроэкономическому анализу для студентов продвинутого уровня (магистратура и аспирантура).

В предлагаемом Вам курсе лекций учтено лучшее из западных учебников по микроэкономике, в основном англоязычных, а также опыт преподавания этой науки в отечественных вузах, что и делает данную учебную книгу особенно ценной. В ней представлен чрезвычайно обширный материал, который в российских учебных изданиях еще не был объединен под одной обложкой. Здесь и выбор потребителя, и выбор производителя в условиях определенности, здесь и выбор в условиях неопределенности. При этом рассматривается как индивидуальный выбор в рамках концепции одного потребителя либо одного производителя, так и результат этого выбора в рамках единой экономической системы.

Исследование — в процессе изучения — состояний экономической системы проводится в рамках двух принципиально важных экономических концепций: концепции согласованного состояния — равновесия и концепции оптимальности, т.е. анализа того, насколько, почему и когда это состояние «хорошее». Изучаются два случая описания функционирующей экономической системы: полное — в рамках концепции общего равновесия, и «урезанное» — в рамках концепции частичного равновесия, т.е. тогда, когда рассматриваются лишь рынки отдельных товаров и услуг.

Значительная часть книги посвящена ситуациям неоптимального функционирования рыночной экономики — фиаско рынков. Подробно изучаются все три основных случая, когда рынок не выводит экономику на оптимум. Прежде всего рассматривается случай, когда в экономике присутствуют, производятся и потребляются общественные блага. При этом, в отличие от большинства книг, изучаются различные способы борьбы с неоптимальностью.

Еще один случай, когда рынок не гарантирует оптимальности возникающей на нем ситуации, — наличие внешних эффектов, экстерналий.

И последний, чрезвычайно важный раздел, которому пока еще мало уделяется внимания в отечественной системе экономического образования, — это экономика информации, изучаемая в рамках концепции асимметричной информации.

Все разделы учебного пособия построены по принципу углубления знаний, полученных в промежуточном курсе микроэкономики. Изложение отличается той строгостью, которая необходима для построения теоретических моделей. Обогащается и усложняется инструментарий анализа. Усвоив представленный в этой книге материал, Вы, читатель, окажетесь подготовленным к восприятию современных научных работ, к проведению самостоятельных научных исследований, анализу сложных экономических проблем. Теперь они станут Вам вполне по плечу, Вы научитесь, мы надеемся, мыслить в терминах микроэкономики.

Именно поэтому мы рекомендуем Вам эти лекции для изучения.

Академик РАН В.Л. Макаров, профессор М.И. Левин

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий курс лекций, предназначенный для студентов магистратуры и аспирантов экономических факультетов, построен на основе нескольких вариативных курсов, читающихся в Государственном университете — Высшей школе экономики (ГУ ВШЭ) для различных специальностей экономического факультета.

Предполагается, что студенты, приступающие к изучению данного курса, владеют основами микроэкономического анализа в пределах программы бакалавриата, основными понятиями теории игр, а также необходимыми математическими знаниями (математический анализ, теория нелинейной оптимизации и теория вероятностей).

При написании курса активно использовались наиболее распространенные западные учебники по микроэкономике продвинутого уровня (Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic Theory. Oxford University Press, 1995; Varian H.R. Microeconomic Analysis. 3rd ed. N.Y.; L.: W.W. Norton & Company, 1992; Kreps D.M. A Course in Microeconomic Theory. Princeton University Press, 1990), а также учебное пособие, созданное коллективом авторов из Новосибирского государственного университета (Бусыгин В., Желободько Е., Цыплаков А. Лекции по микроэкономической теории. Новосибирск: НГУ, 1998). Представленный курс лекций отражает опыт преподавания микроэкономики в ГУ ВШЭ и Российской экономической школе (РЭШ).

Варианты построения курса

Следует отметить, что данное пособие задумывалось как единый курс лекций для студентов различных специальностей экономических факультетов, однако практика преподавания показала, что зачастую различные специализации обучают по разным программам: может варьироваться как продолжительность курса, так и набор тем, включаемых в него. В итоге было принято решение подготовить и опубликовать полный курс лекций, который в таком объеме может читаться студентам, специализирующимся на экономической теории, в продолжение двух семестров, и дать необходимые рекомендации по построению специализированных курсов.

Предлагаемые лекции делятся на следующие блоки (разделы):

- индивидуальный выбор в условиях определенности (I и II разд.);
- индивидуальный выбор в условиях неопределенности (III разд.);
- общее равновесие (IV разд.);
- фиаско рынка — общественные блага, экстерналии и асимметричная информация (V—VII разд.),

которые могут рассматриваться как отдельные курсы. При формировании специализированных программ очень важно учитывать связи, существующие между этими блоками. Так, изучение выбора в условиях определенности необходимо для последующего изучения общего равновесия. Изучению равновесия в модели с контингентными благами и анализу моделей с асимметричной информацией должна предшествовать теория выбора в условиях неопределенности. Фиаско рынка при наличии экстерналий может изучаться как до экономики с общественными благами (тогда общественные блага можно изучить значительно быст-рее, поскольку эта ситуация представляет собой частный случай экстерналий), так и после изучения общественных благ.

Приведем пример формирования программы специализированного курса по микроэкономике из представленных в книге блоков. Обратимся к специализации «Финансы». Если на данной специализации продвинутый курс микроэкономики односеместровый, то имеет смысл остановиться непосредственно на том инструментарии, который особенно необходим в теории финансов. В этом случае предлагается взять следующие темы: выбор в условиях неопределенности; общее равновесие (основные концепции, теоремы благосостояния и далее подробно общее равновесие с контингентными благами, модель Раднера); фиаско рынка — асимметричная информация.

Дополнительные материалы

Студентам, аспирантам и преподавателям, использующим эти лекции, будет весьма полезно учебно-методическое пособие «Сборник задач по курсу микроэкономики продвинутого уровня» (М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2007), в котором по каждой теме даны основные понятия и результаты, а также большое количество задач с примерами решений и варианты проверочных работ. Это пособие подготовлено коллективом авторов, работающих на кафедре микроэкономического анализа ГУ ВШЭ: В.П. Бусыгиным, Е.В. Покатович и А.А. Фридман. В нем представлены все разделы, включенные в данный курс лекций.

Дело в том, что для успешного освоения предлагаемого курса лекций необходимо иметь или приобрести определенную математическую культуру, поскольку слушатель должен не только понимать суть приведенных в тексте доказательств, но и научиться самостоятельно строить доказательства (аналогичные по уровню сложности) утверждений. Для этого крайне важно иметь соответствующий банк заданий с упражнениями, которые способствовали бы выработке навыков самостоятельного анализа.

В ряде случаев в упражнения, представленные в рекомендуемом задачнике, включены важные теоретические результаты, которые не вошли в текст лекций в силу временно́й ограниченности стандартного лекционного курса, который обычно не превышает двух семестров.

Благодарности

Идея написания пособия по курсу микроэкономики продвинутого уровня возникла у автора в 2001 г., вместе с приглашением на работу на кафедру микроэкономического анализа в ГУ ВШЭ. Таким образом, в течение четырех лет формировался новый курс лекций, который и лег в основу данной книги. Значительный вклад в создание этого курса внесли студенты ГУ ВШЭ, учившиеся в магистратуре в 2001—2004 гг., и ассистенты Евгения Александровна Левина и Елена Викторовна Покатович, поскольку именно задаваемые ими вопросы позволили выявить и более подробно осветить наиболее трудные для понимания места.

Огромная благодарность Елене Викторовне Покатович также за компьютерный набор текста, формул и рисунков.

Автор благодарен Национальному фонду подготовки кадров (НФПК) за финансовую поддержку данного проекта. Отдельная благодарность анонимным рецензентам НФПК за замечания по первоначальному варианту рукописи.

Рукопись претерпела существенные изменения в процессе ее обсуждения с Владимиром Петровичем Бусыгиным, чьи замечания и рекомендации были необыкновенно полезны.

Автор глубоко признателен РЭШ, где начинал свою карьеру. Уникальный опыт работы в РЭШ, общение с профессорами из ведущих отечественных и зарубежных университетов существенно повлияли на представления автора о построении магистерских курсов, организации самостоятельной работы и контроля знаний учащихся. Все это нашло свое отражение в данном курсе лекций.

I

ВЫБОР ПОТРЕБИТЕЛЯ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Лекция 1

Предпочтения и полезность

В теории потребителя мы будем изучать стандартную модель поведения потребителя, в которой предполагается, что потребитель выбирает наилучший набор из всех доступных ему наборов. Для формализации модели необходимо описать множество, на котором потребитель делает выбор, и его предпочтения. Начнем анализ с описания предпочтений.

Пусть потребитель сталкивается с разнообразными потребительскими наборами, представленными потребительским множеством X. Если в экономике имеется N товаров, то, если не сказано иначе, будем считать, что эти товары могут потребляться лишь в неотрицательном количестве и нет более никаких ограничений на потребительские наборы. Тогда множество X представлено N-мерным неотрицательным ортантом $X = R_+^N$.

Будем считать, что потребитель имеет определенные предпочтения на множестве потребительских наборов X. Если для потребителя набор x не хуже, чем набор y, то будем говорить, что данный потребитель *нестрого* предпочитает набор x набору y и записывать $x \succsim y$. На основе нестрого отношения предпочтения можно определить и два других отношения: *строгое* предпочтение и отношение *безразличия*.

Определение

Будем говорить, что набор x строго предпочитается набору y и записывать это как $x \succ y$, если набор x нестрого предпочтительнее набора $y\,(x \succsim y)$, а обратное $(y \succsim x)$ неверно.

Будем говорить, что наборы x и y безразличны для потребителя и записывать $x \sim y$, если набор x нестрого предпочтительнее набора $y\,(x \succsim y)$ и наоборот $y \succsim x$. □

Предпочтения потребителя призваны упорядочить наборы товаров из потребительского множества, поэтому они должны удовлетворять ряду разумных свойств, а именно будем предполагать, что отношение предпочтения полное и транзитивное.

Определение

Аксиома полноты: для любых двух наборов x и y из потребительского множества $X\,(x, y \in X)$ должно выполняться следующее: либо $x \succsim y$, либо $y \succsim x$.

Аксиома транзитивности: для любых трех наборов x, y и z из потребительского множества $X\,(x,\ y,\ z \in X)$, если $x \succsim y$ и $y \succsim z$, то $x \succsim z$. □

Свойство полноты позволяет сравнивать любые наборы из потребительского множества, а свойство транзитивности делает предпочтения согласованными.

Отношение предпочтения, удовлетворяющее аксиомам полноты и транзитивности, в дальнейшем будем называть *рациональным*.

В теории потребителя удобнее работать не с предпочтениями, а с *функцией полезности*, представляющей предпочтения потребителя.

Определение

Функцией полезности, представляющей предпочтения $\succsim$, определенные на множестве X, называют функцию $u : X \to R$ такую, что для любых наборов x и y из X соотношение $x \succsim y$ имеет место тогда и только тогда, когда $u(x) \geq u(y)$. □

Всегда ли отношение предпочтения можно описать с помощью некоторой функции полезности? Как видно из следующего утверждения (1.1), такое представление возможно лишь в том случае, если предпочтения удовлетворяют аксиомам полноты и транзитивности, т.е. являются рациональными.

Утверждение 1.1. Необходимое условие существования функции полезности.

Если предпочтения $\succsim$, определенные на множестве X, представимы с помощью функции полезности $u(\cdot)$, то эти предпочтения являются рациональными.

Доказательство

1. Покажем, что предпочтения $\succsim$ удовлетворяют аксиоме полноты. По определению $u(\cdot)$ областью значений функции полезности является множество действительных чисел. Любые два действительных числа $u(x)$ и $u(y)$ сравнимы: либо $u(x) \geq u(y)$, либо $u(x) \leq u(y)$. Если $u(x) \geq u(y)$, то $x \succsim y$ и, если $u(x) \leq u(y)$, то $y \succsim x$. Таким образом, сравнимы и любые два набора x и y из X и, следовательно, отношение предпочтения удовлетворяет аксиоме полноты.

2. Покажем, что предпочтения транзитивны. Возьмем три любых набора x, y и z из X такие, что $x \succsim y$ и $y \succsim z$. Покажем, что $x \succsim z$. По определению функции полезности имеем $x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$ и аналогично $y \succsim z \Leftrightarrow u(y) \geq u(z)$. Поскольку $u(x) \geq u(y)$ и $u(y) \geq u(z)$, то $u(x) \geq u(z)$, что эквивалентно тому, что $y \succsim z$. ■

Является ли условие рациональности предпочтений достаточным для представления их с помощью некой функции полезности? Если бы множество X было конечным (не более чем счетным), то ответ был бы положительным, поскольку элементы этого множества можно было бы упорядочить и присвоить им номера — значения функции полезности. В общем случае рациональности предпочтения недостаточно для существования функции полезности, что можно продемонстрировать на примере лексикографических предпочтений.

Пример 1.1. Лексикографические предпочтения и функция полезности.

Согласно лексикографическим предпочтениям все потребительские наборы упорядочиваются так же как слова в словаре: сначала по первой координате, при совпадении первой координаты — по второй и т.д. Рассмотрим для простоты экономику с двумя товарами: $X = R_+^2$. Определим на этом потребительском множестве лексикографические предпочтения следующим образом:

$$x \succsim y, \text{ если } x_1 > y_1 \text{ или } x_1 = y_1 \text{ и } x_2 \geq y_2.$$

Эти предпочтения удовлетворяют аксиомам полноты и транзитивности, но не могут быть представлены с помощью функции полезности.

Заметим, что при лексикографических предпочтениях никакие два разных набора товаров не могут быть эквивалентны, поскольку различие хотя бы одной из координат векторов, представляющих данные наборы, влечет строгое предпочтение набора с большей координатой. Таким образом, каждый набор товаров (каждая точка из $X = R_+^2$) должна получить свое (уникальное) значение полезности, т.е. нам нужно занумеровать с помощью действительных чисел все точки неотрицательного ортанта, сохраняя при этом их упорядочивание. Покажем, что осуществить подобное отображение невозможно.

Действительно, предположим, что нам удалось построить функцию полезности для лексикографических предпочтений. Рассмотрим два набора, которые отличаются лишь количеством второго блага: $(a,\ 0)$ и $(a,\ 1)$. Если функция полезности для данных предпочтений существует, то $u(a,\ 0) < u(a,\ 1)$, причем $u(a,\ 0)$ и $u(a,\ 1)$ — действительные числа. Тогда найдется рациональное число $r(a)$, лежащее между $u(a,\ 0)$ и $u(a,\ 1)$, т.е. $u(a,\ 0) < r(a) < u(a,\ 1)$. (Если между $u(a,\ 0)$ и $u(a,\ 1)$ лежат несколько рациональных чисел, то в качестве $r(a)$ возьмем наименьшее из них.) Заметим, что, построенная функция $r(a)$ возрастает по a. Действительно, если $\underline{a} < \overline{a}$, то $r(\underline{a}) < u(\underline{a},\ 1) < u(\overline{a},\ 0) < r(\overline{a})$. Таким образом, функция $r(a)$ дает взаимооднозначное отображение множества неотрицательных действительных чисел, которое несчетно, во множество рациональных чисел, являющееся счетным, что математически невозможно. Таким образом, мы показали, что не существует функции полезности, представляющей лексикографические предпочтения.

Попытаемся на интуитивном уровне понять, в чем же состоит особенность лексикографических предпочтений, не позволяющая представить их с помощью функции полезности. Заметим, что нам не удалось найти эквивалентные друг другу потребительские наборы в силу наличия «скачков в предпочтениях». Возможно, исключение подобного скачкообразного поведения, т.е. введение дополнительного предположения о *непрерывности предпочтений*, поможет нам решить эту проблему.

Определение

Отношение предпочтения $\succsim$, определенное на множестве X, *непрерывно*, если для любого элемента $x \in X$

множество наборов не хуже чем $x : \{y \in X : y \succsim x\}$

и

множество наборов не лучше чем $x : \{y \in X : y \precsim x\}$

являются замкнутыми множествами. □

Легко проверить, что лексикографические предпочтения не удовлетворяют приведенному выше определению непрерывности, поскольку множество наборов, которые не хуже чем данный набор x^*, не является замкнутым (см. рис. 1.1).

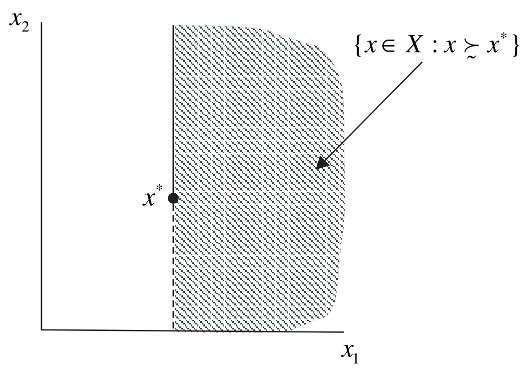

Рис. 1.1. Нарушение аксиомы непрерывности для лексикографических предпочтений

Если дополнить аксиомы полноты и транзитивности предпочтений аксиомой непрерывности, то, как следует из нижеприведенного утверждения, этого набора предположений будет достаточно для существования функции полезности, представляющей эти предпочтения.

Утверждение 1.2. Существование функции полезности.

Пусть предпочтения $\succsim$, определенные на множестве *X*, рациональны и удовлетворяют аксиоме непрерывности. Тогда существует непрерывная функция полезности $u(x)$, представляющая эти предпочтения.

Докажем существование функции полезности для случая строго монотонных предпочтений, считая, как договорились ранее, что $X = R_+^N$. Однако прежде чем приступить к доказательству, нам необходимо определить, какие предпочтения мы будем называть строго монотонными.

Определение

Предпочтения $\succsim$, определенные на множестве *X*, являются *строго монотонными*, если для любых двух наборов *x* и *y* из *X* таких, что $y \geq x$ и $y \neq x$, имеем $y \succ x$.

Предпочтения $\succsim$, определенные на множестве *X*, являются *слабо монотонными*, если для любых двух наборов *x* и *y* из *X* таких, что $y \geq x$, имеем $y \succsim x$. □

Доказательство

Поясним графически идею доказательства (см. рис. 1.2).

Построим искомую функцию полезности следующим образом. Для любого произвольного набора *x* мы найдем эквивалентный ему набор на «единичном луче», обозначенном на рис.1.2 как *te*. Поставим в соответствие набору *x* число, соответствующее любой (например, первой) координате этого эквивалентного набора. Напомним, что поскольку эквивалент ищем на единичном луче, то все координаты у этого набора совпадают. Нам нужно показать, что:

1) такой эквивалент существует для любого набора из потребительского множества;

2) этот эквивалент на единичном луче единствен;

3) построенная функция действительно представляет исходные предпочтения.

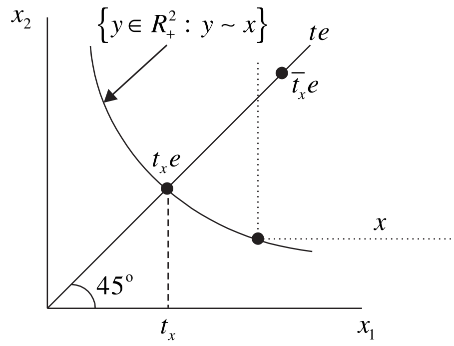

Рис. 1.2. Иллюстрация построения функции полезности

Перейдем к реализации намеченной нами схемы доказательства.

1. Через e обозначим N-мерный единичный вектор: $e = (1, 1, \ldots, 1)$. Рассмотрим произвольный набор $x \in X$. Поставим ему в соответствие число t_x такое, что $x \sim t_x e$. Покажем, что такое число, а следовательно, такой эквивалент набора x на луче te существует. Для этого рассмотрим два множества:

множество чисел t, порождающих наборы на луче te, которые не лучше чем $x: W = \{t \in R_+ : x \succsim te\}$;

множество чисел t, порождающих наборы на луче te, которые не хуже чем $x: B = \{t \in R_+ : te \succsim x\}$.

Заметим, что множество W непусто, поскольку содержит ноль. Действительно, поскольку $x \in R_+^N$, то $x \geq 0$, откуда в силу строгой монотонности получаем $x \succsim 0$. Множество B также непусто, поскольку всегда можно рассмотреть лежащий на единичном луче набор $\bar{t}_x e >> x$, все координаты которого больше, чем координаты x (см. рис.1.2). Тогда в силу строгой монотонности $\bar{t}_x e \succ x$.

Множества W и B замкнуты в силу непрерывности предпочтений. Продемонстрируем замкнутость множества W (для множества B рассуждения аналогичны). Непрерывность предпочтений влечет замкнутость множества $\tilde{W} = \{y \in X : y \precsim x\}$. Заметим, что множество W является пересечением множества $\tilde{W}$ с лучом te и, следовательно, замкнуто как пересечение двух замкнутых множеств.

Покажем, что объединение множеств W и B совпадает с множеством неотрицательных действительных чисел: $B \cup W = R_+$. Включение $B \cup W \subset R_+$ очевидно в силу определения множеств W и B. Покажем, что имеет место и обратное включение. В силу полноты предпочтений либо $te \succsim x$, и тогда $t \in B$, либо $x \succsim te$ и, значит, $t \in W$. Таким образом, $R_+ \subset B \cup W$.

Итак, B и W — непустые, замкнутые множества, а их объединение дает R_+ — связное множество, следовательно, пересечение B и W непусто. Это означает, что для любого $x \in R_+^N$ существует t_x такое, что $t_x e \sim x$, поскольку $t_x \in B$ и $t_x \in W$.

2. Покажем, что для любого $x \in R_+^N$ такое значение t_x $(t_x e \sim x)$ единственно. Предположим, что это не так и существуют $t_x^1 \neq t_x^2$ такие, что $t_x^1 e \sim x$ и $t_x^2 e \sim x$. Предположим для определенности, что $t_x^1 > t_x^2$. Тогда $t_x^1 e >> t_x^2 e$, откуда в силу строгой монотонности имеем $t_x^1 e \succ t_x^2 e$ и с учетом транзитивности предпочтений приходим к противоречию $x \sim t_x^1 e \succ t_x^2 e$.

3. Итак, возьмем t_x в качестве значения функции полезности для набора $x : u(x) = t_x$. Осталось убедиться, что полученная функция действительно отражает исходные предпочтения. Это следует из построения функции. Пусть $t_x \geq t_y$, тогда $t_x e \geq t_y e$, откуда в силу строгой монотонности имеем $t_x e \geq t_y e$. По построению $t_x e \sim x$ и $t_x e \sim y$, откуда с учетом транзитивности предпочтений получаем $x \succsim y$. Обратно: пусть $x \succsim y$ и по построению $t_x e \sim x$ и $t_x e \sim y$, откуда имеем $t_x e \succsim t_y e$. Мы хотим показать, что $t_x \geq t_y$. Предположим, что это не так, т.е. $t_x < t_y$. Тогда в силу строгой монотонности $t_y e \succ t_e e$, что противоречит условию $t_x e \succsim t_y e$. ■

Итак, мы доказали существование функции полезности, представляющей рациональные непрерывные предпочтения. Можно показать (здесь мы это делать не будем), что данная функция непрерывна. Отметим, что в утверждении говорится лишь о том, что среди всех функций полезности, представляющих данные предпочтения, есть непрерывная функция. Это вовсе не означает, что все функции полезности, представляющие данные предпочтения, должны быть непрерывны. Согласно определению функции полезности эта функция не является единственной. Любое положительное монотонное преобразование $v(x) = f\left(u(x)\right)$, где $f(\cdot)$ — строго возрастающая функция, также представляет исходные предпочтения. При этом $f(\cdot)$, а следовательно, и функция $f\left(u(\cdot)\right)$, не обязана быть непрерывной функцией, даже если $u(\cdot)$ непрерывна.

При анализе поведения потребителя будут использоваться некоторые дополнительные свойства предпочтений (помимо тех, что гарантируют существование функции полезности). Рассмотрим эти свойства.

В упрощенном доказательстве утверждения о существовании функции полезности мы опирались на свойство строгой монотонности. В дальнейшем анализе мы будем использовать более слабое свойство, отражающее «востребованность» товаров потребителем, называемое *локальной ненасыщаемостью*.

Определение

Предпочтения $\succsim$, определенные на множестве X, являются *локально ненасыщаемыми*, если для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in X$ такой, что $|x - y| \le \varepsilon$ и $y \succ x$, где $|x - y| = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$. □

Другими словами, в любой окрестности каждого потребительского набора x найдется лучший, чем x, потребительский набор. Заметим, что лучший набор (y) может содержать и меньшее количество всех товаров, как показано на рис. 1.3.

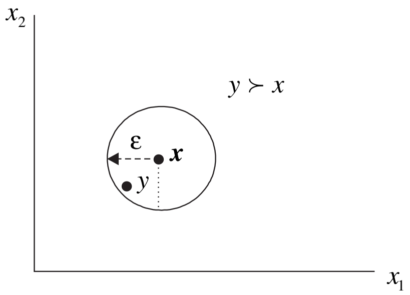

Рис. 1.3. Локальная ненасыщаемость не влечет монотонность предпочтений

Заметим, что в случае, когда $X = R_+^N$, локальная ненасыщаемость исключает ситуацию, когда все товары являются антиблагами, поскольку тогда набор $x = 0$ был бы точкой насыщения предпочтений.

Пример 1.2. Предпочтения, не удовлетворяющие свойству локальной ненасыщаемости.

Приведем пример предпочтений, не удовлетворяющих свойству локальной ненасыщаемости при условии, что товары не являются антиблагами. Подобная ситуация изображена на рис. 1.4, где кривая безразличия представлена целой полосой (все наборы, лежащие в заштрихованной области, эквивалентны для потребителя). Тогда мы можем взять окрестность, целиком лежащую в этой области, и в этой окрестности все наборы будут эквивалентны, т.е. не найдется ни одного набора, который был бы строго предпочтительнее данного набора *x*.

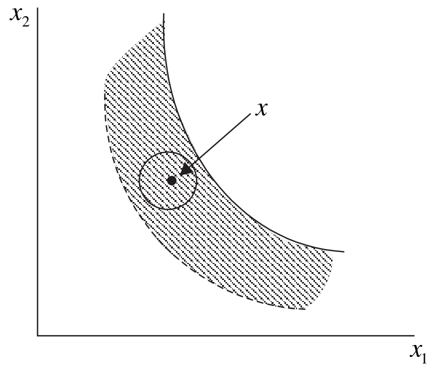

Рис. 1.4. Нарушение локальной ненасыщаемости предпочтений

Для того чтобы в дальнейшем гарантировать «хорошие» свойства решения задачи потребителя, мы будем предполагать *выпуклость* (или даже *строгую выпуклость*) предпочтений.

Определение

Предпочтения $\succsim$, определенные на множестве *X*, являются *выпуклыми*, если для любых $x,\ y,\ z \in X$ таких, что $y \succsim x$ и $z \succsim x$, имеем $\alpha y + (1-\alpha) z \succsim x$ при любом $0 \le \alpha \le 1$.

Предпочтения $\succsim$, определенные на множестве X, являются *строго выпуклыми*, если для любых x, y, $z \in X$ таких, что $y \succsim x$, $z \succsim x$ и $y \neq z$, имеем $\alpha y + (1-\alpha) z \succ x$ при любом $0 < \alpha < 1$. □

Согласно вышеприведенным определениям предпочтения являются выпуклыми (строго выпуклыми), если для любого потребительского набора x из X множество всех наборов, которые не хуже, чем данный, выпукло (строго выпукло). Рисунок 1.5 иллюстрирует строгую выпуклость предпочтений.

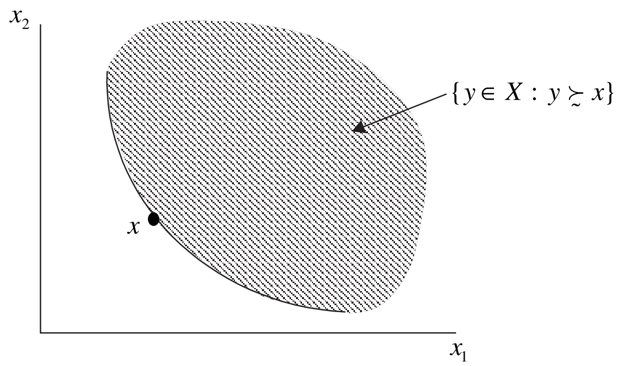

Рис. 1.5. Множество $\{y \in X : y \succsim x\}$
в случае строго выпуклых предпочтений

Выпуклость предпочтений означает квазивогнутость функции полезности $u(\cdot)$ (строгая выпуклость предпочтений — строгую квазивогнутость $u(\cdot)$). Это напрямую следует из определения квазивогнутой функции и определения функции полезности. Напомним, что функция $u(\cdot)$, определенная на множестве X, называется квазивогнутой, если для любого $\bar{u}$ множество $\{y \in X : u(y) \geq \bar{u}\}$ выпукло. Возможно, ранее (например, в курсе промежуточного уровня) вы имели дело с вогнутыми функциями полезности. Заметим, что любая вогнутая функция является и квазивогнутой, однако обратное неверно. Так, например, любая возрастающая функция одной переменной является квазивогнутой, но вовсе не обязана быть вогнутой. Заметим, что не для всех выпуклых предпочтений существует вогнутая функция полезности, представляющая эти предпочтения.

Лекция 2

Задача максимизации полезности

Мы предполагаем, что потребитель стремится выбрать из множества доступных ему потребительских наборов такой набор (наборы), который с его точки зрения является наилучшим.

Будем предполагать, что предпочтения потребителей рациональны и непрерывны, что позволяет представить их с помощью непрерывной функции полезности $u(x)$. Будем предполагать, что потребительское множество — это совокупность всевозможных наборов, в которых каждое благо представлено в неотрицательном количестве, т.е. $X = R_+^N$. Однако в действительности потребителю бывает доступно не все множество *X*, а лишь некое его подмножество, называемое бюджетным множеством. Пусть приобретение товаров и услуг связано с оплатой каждой единицы товара и цена единицы товара фиксирована. Обозначим вектор цен через $p = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$. Покупки потребителя при данном векторе цен ограничены имеющимся у него доходом, который будем обозначать через *I*. При отсутствии каких-либо иных ограничений на выбор потребительского набора бюджетное множество потребителя можно записать как

$$B = \{x \in X : px \le I\}.$$

Задача потребителя, которая заключается в выборе наиболее предпочтительного набора при данных ценах $p >> 0$ (будем считать цены всех благ положительными) и уровне дохода $I > 0$ может быть записана следующим образом:

$$\max_{x \ge 0} \; u(x)$$
$$px \le I.$$

Заметим, что при принятых допущениях бюджетное множество $B = \{x \in R_+^N : px \le I\}$ непусто $(0 \in B)$ и ограниченно, поскольку $0 \le x_i \le \dfrac{I}{p_i}$. Таким образом, решение задачи потребителя существует, поскольку бюджетное множество является непустым компактом, а $u(\cdot)$ — непрерывная функция, следовательно, всегда достигает максимума на компактном множестве.

Решая задачу максимизации полезности на бюджетном множестве, мы получаем, что каждой паре $(p,\ I)$ соответствует множество наилучших при данных ценах и доходе потребительских наборов $x(p,\ I)$, которое мы будем называть *вальрасовским* или *маршалловским спросом*, либо просто *спросом*. Заметим, что в общем случае $x(p,\ I)$ не является однозначным соответствием. Если же каждой паре $(p,\ I)$ соответствует единственный наилучший потребительский набор, то $x(p,\ I)$ называют *функцией маршалловского спроса*.

Утверждение 2.1. Свойства маршалловского спроса $x(p, I)$.

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция, представляющая предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$, $p >> 0$, тогда $x(p,\ I)$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) однородность нулевой степени относительно цен и дохода: $x(\lambda p,\ \lambda I) = x(p,\ I)$ для любого $\lambda > 0$;

2) если предпочтения локально ненасыщаемые, то маршалловский спрос удовлетворяет бюджетному ограничению в форме равенства: для любого $x \in x(p,\ I)$ имеем $px = I$;

3) если предпочтения выпуклы, то $x(p,\ I)$ — выпуклое множество;

4) если предпочтения строго выпуклы (следовательно, $u(\cdot)$ строго квазивогнутая), то для каждой пары $(p,\ I)$ множество $x(p,\ I)$ состоит из одного элемента, т.е. $x(p,\ I)$ является функцией спроса и, кроме того, $x(p,\ I)$ — непрерывная функция.

Доказательство

1. При изменении всех цен и дохода в одинаковой пропорции мы умножаем левую и правую части бюджетного ограничения на одно и то же положительное число, что сохраняет неравенство $\lambda px \leq \lambda I$; при этом ни множество *X*, ни функция полезности не изменяются. Это означает, что бюджетное множество остается прежним, что при неизменной целевой функции влечет и прежний набор решений.

2. Покажем, что локальная ненасыщаемость влечет выполнение бюджетного ограничения в виде равенства. Предположим, что это не так и $px < I$ для некоторого набора $x \in x(p, I)$. Это означает, что набор x лежит внутри бюджетного множества и, значит, существует некоторая окрестность точки x, которая также целиком лежит внутри бюджетного множества, как показано на рис. 2.1. Согласно локальной ненасыщаемости предпочтений в этой окрестности должен существовать набор y, который строго предпочтительнее x: $y \succ x$, а это противоречит тому, что x является наилучшим набором из данного бюджетного множества.

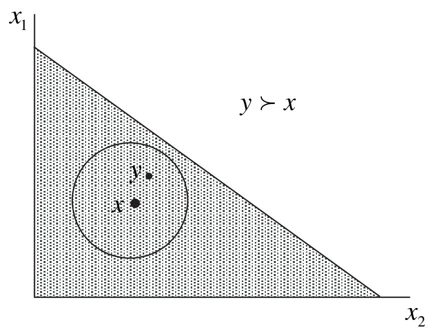

Рис. 2.1. Выполнение бюджетного ограничения как равенства при локальной ненасыщаемости предпочтений

3. Возьмем два набора, являющихся решениями задачи потребителя: $(x, x') \in x(p, I)$. Эти наборы должны приносить одинаковую полезность $u(x) = u(x') = u^*$.

Рассмотрим $x'' = \alpha x + (1-\alpha)x'$, где $\alpha \in [0,1]$. Заметим, что x'' принадлежит бюджетному множеству, поскольку

$$px'' = \alpha px + (1-\alpha)px' \le \alpha I + (1-\alpha)I = I.$$

В силу выпуклости предпочтений имеем $\alpha x + (1-\alpha)x' \succsim x$, откуда $u(x'') \ge u^*$. Это означает, что x'' доступен потребителю при ценах p и доходе I и дает полезность, не меньшую, чем наилучшие при данных параметрах наборы, т.е. x'' также является решением задачи: $x'' \in x(p, I)$. Это означает, что $x(p, I)$ — выпуклое множество.

4. Предположим, что задача максимизации полезности при ценах p и доходе I имеет два разных решения: $x \neq x'$ и $(x, x') \in x(p, I)$. В силу того что данные наборы являются решениями задачи потребителя, они должны приносить одинаковую полезность: $u(x) = u(x') = u^*$. Рассмотрим $x'' = \alpha x + (1-\alpha)x'$, где $\alpha \in (0, 1)$. По аналогии с предыдущим пунктом можно показать, что x'' принадлежит бюджетному множеству. В силу строгой выпуклости предпочтений $\alpha x + (1-\alpha)x' \succ x$, откуда имеем $u(x'') > u^*$, что противоречит тому, что x и x' — решения задачи потребителя при данных ценах и доходе. Таким образом, при строго выпуклых предпочтениях решение задачи потребителя при каждом наборе экзогенных параметров единственно, т.е. мы имеем дело с функцией спроса. Непрерывность функций спроса следует из теоремы о максимуме[1]. ■

Если функция полезности дифференцируема, то при выполнении условия регулярности мы можем охарактеризовать решение задачи потребителя с помощью условий Куна — Таккера. Заметим, что в силу положительности дохода задача максимизации полезности удовлетворяет условию регулярности Слейтера, поскольку $px < I$ при $x = 0$. Согласно теореме Куна — Таккера, если x^* — решение задачи потребителя при (p, I), то существует множитель Лагранжа $\lambda \geq 0$ такой, что для любого товара $i = 1, 2, \ldots, N$

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i} \leq \lambda p_i;$$

$$\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i} = \lambda p_i, \text{ если } x_i^* > 0.$$

Соответственно внутреннее решение (решение, где потребление каждого товара положительно) характеризуется равенством предель-

[1] Формулировка теоремы о максимуме такова. Пусть $x(\alpha)$ — множество решений задачи условной оптимизации: $\max\limits_{x \in G(\alpha)} f(x, \alpha)$ и $V(\alpha) = f(x^*, \alpha)$, где $x^* \in x(\alpha)$. Если $G(\alpha)$ — непрерывное отображение и $f(x, \alpha)$ — непрерывная функция, то отображение $x(\alpha)$ полунепрерывно сверху, а функция $V(\alpha)$ непрерывна. Более того, если $x(\alpha)$ — функциональное отображение, то $x(\alpha)$ — непрерывная функция.

ной нормы замещения между двумя благами и их относительными ценами:

$$MRS_{ij}(x^*) = \frac{\partial u(x^*)/\partial x_i}{\partial u(x^*)/\partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}.$$

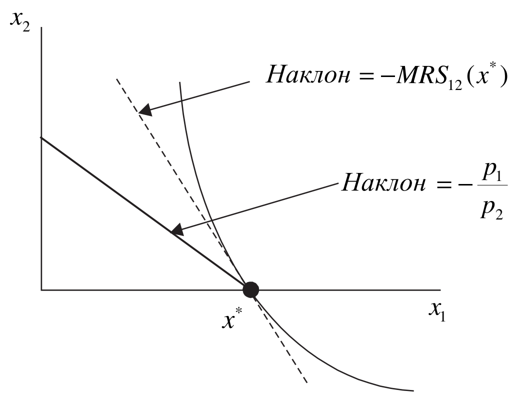

Рис. 2.2. Угловое решение задачи потребителя, характеризующееся превышением предельной нормы замещения над соотношением цен

Однако для углового решения (решения, где какой-то из товаров не потребляется) не требуется равенства предельной нормы замещения и соотношения цен. Так, например, если $x_i^* = 0$, а $x_j^* > 0$, то $MRS_{ij}(x^*) = \frac{\partial u(x^*)/\partial x_i}{\partial u(x^*)/\partial x_j} \le \frac{p_i}{p_j}$. Такая ситуация для случая двух товаров изображена на рис. 2.2, где потребитель приобретает только первый товар $(i = 2,\ j = 1)$. Как видно из рисунка, потребитель хотел бы сократить потребление второго товара еще больше и увеличить за счет этого потребление первого товара, но, поскольку отрицательное потребление не допускается, то ему приходится остановиться в точке x^*. Заметим, что, если функция полезности квазивогнута, то выписанные выше условия первого порядка являются необходимыми и достаточными[2].

Из задачи потребителя, помимо характеристики спроса, мы получаем зависимость полезности от экзогенных параметров, таких, как цены и доход, если подставим найденный спрос в целевую функцию. Полученную функцию называют *косвенной функцией полезности*. В дальнейшем будем обозначать эту функцию через $v(p, I) = u(x^*)$, где $x^* \in x(p, I)$.

Утверждение 2.2. Свойства косвенной функции полезности $\boldsymbol{v(p, I)}$.

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция, представляющая предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$, $p >> 0$. Тогда $v(p, I)$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) однородность нулевой степени относительно $(p, I): v(\lambda p, \lambda I) = v(p, I)$ для всех $\lambda > 0$;

2) не убывает по доходу; строго возрастает по доходу, если предпочтения локально ненасыщаемы;

3) не возрастает по ценам;

4) квазивыпукла по (p, I), т.е. множество $\{(p, I): v(p, I) \le \bar{v}\}$ выпукло при любом $\bar{v}$;

5) непрерывна при $p >> 0$ и $I > 0$;

6) если предпочтения локально ненасыщаемые и строго выпуклые ($u(\cdot)$ строго квазивогнута) и функция $v(p, I)$ дифференцируема при $(\tilde{p}, \tilde{I}) >> 0$, то выполняется *тождество Роя* $x_i(\tilde{p}, \tilde{I}) = -\dfrac{\partial v(\tilde{p}, \tilde{I})/\partial p_i}{\partial v(\tilde{p}, \tilde{I})/\partial I}$.

[2] Рассмотрим задачу $\max\limits_{x \in G} f(x)$, где $G = \{x \in R_N^+ : g(x) \le 0\}$. Пусть функции $g(\cdot)$ квазивыпуклы, а целевая функция удовлетворяет условию $\sum_i f_i'(x)(\tilde{x}_i - x_i) > 0$ для всех x и $\tilde{x}$ таких, что $f(\tilde{x}) > f(x)$. Тогда, если x^* удовлетворяет необходимым условиям Куна — Такера и выполнено условие регулярности, то x^* является точкой глобального максимума. Указанное условие для целевой функции выполнено, если функция $f(\cdot)$ вогнута или же квазивогнута и $\nabla f(x) \ne 0$ для всех x.

Доказательство

1. Поскольку маршалловский спрос однородный нулевой степени, то при изменении цен и доходов в одинаковой пропорции спрос не меняется, а следовательно, не меняется и значение целевой функции, т.е. $v(p, I)$ обладает однородностью нулевой степени относительно (p, I).

2. Рассмотрим $I' > I$ и покажем, что $v(p, I') \geq v(p, I)$. Рассмотрим два бюджетных множества: $B = \{x \in R_+^N : px \leq I\}$ и $B' = \{x \in R_+^N : px \leq I'\}$. Поскольку $I' > I$, то $B \subset B'$, откуда имеем

$$v(p, I') = \max_{x \in B'} u(x) \geq \max_{x \in B} u(x) = v(p, I).$$

Покажем, что при локально ненасыщаемых предпочтениях не может быть равенства. Рассмотрим $x^* \in \arg\max_{x \in B} u(x)$. В силу локальной ненасыщаемости $px^* = I < I'$. Это означает, что x^* — внутренняя точка множества B', т.е. существует окрестность точки x^*, которая целиком лежит в B', а в любой такой окрестности по свойству локальной ненасыщаемости найдется лучшая точка и, значит, $v(p, I') > u(x^*) = v(p, I)$.

3. Покажем, что $v(p, I)$ не возрастает по p. Рассмотрим $p' \geq p$ и определим бюджетные множества $B = \{x \in R_+^N : px \leq I\}$ и $B' = \{x \in R_+^N : p'x \leq I\}$. Поскольку $B' \subset B$, следовательно

$$v(p, I') = \max_{x \in B} u(x) \geq \max_{x \in B'} u(x) = v(p', I).$$

4. Покажем, что множество $\{(p,I) : v(p,I) \leq \bar{v}\}$ выпукло при любом $\bar{v}$. Рассмотрим два произвольных элемента этого множества (p, I) и (p', I') такие, что $v(p, I) \leq \bar{v}$ и $v(p', I') \leq \bar{v}$. Определим их выпуклую комбинацию: $p'' = \left(\alpha p + (1-\alpha)p'\right)$ и $I'' = \left(\alpha I + (1-\alpha)I''\right)$, где $\alpha \in [0, 1]$. Мы хотим показать, что $v(p'', I'') \leq \bar{v}$.

Если $p''x \leq I''$, что можно переписать как

$$\alpha px + (1-\alpha)p'x \leq \alpha I + (1-\alpha)I', \text{ то}$$

$$\text{либо } px \leq I, \text{ либо } p'x \leq I'.$$

Рассмотрим каждый случай в отдельности. Если для произвольного x, удовлетворяющего ограничению $p''x \leq I''$, верно первое неравенство, то $u(x) \le v(p, I) \le \bar{v}$. Если же окажется верно второе, то $u(x) \le v(p', I') \le \bar{v}$. Таким образом, заключаем, что для любого x, удовлетворяющего ограничению $p''x \le I''$, верно $u(x) \le \bar{v}$. Это означает, что $v(p'', I'') \le \bar{v}$, поскольку спрос $x(p'', I'')$ должен удовлетворять бюджетному ограничению $p''x \le I''$. Таким образом, косвенная функция полезности квазивыпукла по ценам и доходу.

Заметим, что установленное свойство косвенной функции полезности верно для любой прямой функции полезности $u(x)$, независимо от того, является она квазивогнутой или нет. Доказательство можно проиллюстрировать графически. Пусть точки x и x' соответствуют решениям задачи потребителя при параметрах (p, I) и (p', I') соответственно, причем $u(x) = u(x') = u^*$. Заметим, что бюджетная линия $p''x = I''$ пройдет через точку пересечения прямых $px = I$ и $p'x \le I'$ и будет лежать между ними, как показано на рис. 2.3. Как видно из рисунка, при новом бюджетном множестве $p''x \le I''$ мы не можем достичь уровня полезности, большего, чем u^*.

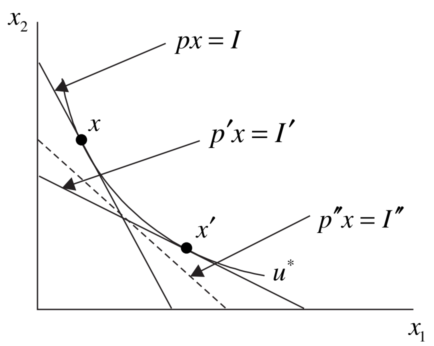

Рис. 2.3. Иллюстрация квазивыпуклости косвенной функции полезности по ценам и доходу

5. Непрерывность косвенной функции полезности при строго положительных ценах и доходе следует из теоремы о максимуме.

6. Доказательство тождества Роя будет приведено позже (после обсуждения двойственности в теории потребителя). ■

Лекция 3

Задача минимизации расходов

В предыдущей лекции мы рассмотрели задачу максимизации полезности при заданном доходе. Теперь поставим вопрос так: как достичь данного уровня полезности с минимальными расходами? Для ответа на этот вопрос следует решить задачу минимизации расходов. Опишем допустимое множество задачи как множество таких наборов из потребительского множества X, полезность которых не меньше заданного уровня $\bar{u}$:

$$V_{\bar{u}} = \{x \in X : u(x) \geq \bar{u}\}.$$

Тогда задача минимизации расходов примет вид

$$\min_{x \in V_{\bar{u}}} px.$$

Обозначим решения этой задачи (при различных значениях цен и полезности) через $h(p,\ u)$, и будем называть соответствующее отображение *компенсированным спросом* или *спросом по Хиксу*. Заметим, что мы обозначили компенсированный спрос через h для того, чтобы отличать его от маршалловского спроса — решения задачи максимизации полезности. Для случая двух товаров задачу минимизации расходов можно легко представить графически (см. рис. 3.1).

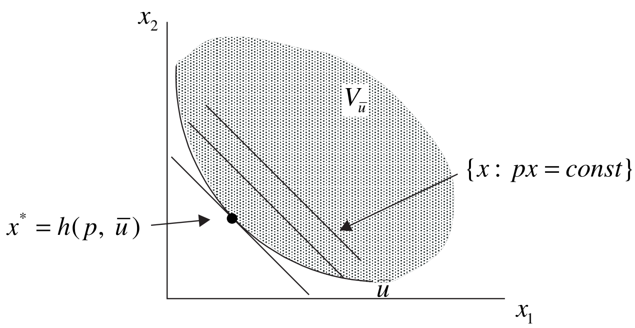

Рис. 3.1. Иллюстрация задачи минимизации расходов

На рис. 3.1 мы изобразили допустимое множество задачи минимизации расходов и линии уровня целевой функции (линии постоянных расходов), которые являются прямыми с наклоном, равным по модулю соотношению цен товаров. Линии постоянных расходов, расположенные ближе к началу координат, соответствуют меньшим расходам. Таким образом, минимальные расходы на множестве $V_{\bar{u}}$ достигаются в точке x^*.

Утверждение 3.1. Свойства компенсированного спроса $h(p, \bar{u})$.

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция, представляющая предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$, $p >> 0$, $\bar{u} \geq u(0)$. Тогда $h(p, \bar{u})$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) однородность нулевой степени относительно цен: $h(\lambda p, \bar{u}) = h(p, \bar{u})$ для любого $\lambda > 0$;

2) ограничение задачи минимизации расходов выполняется как равенство: для любого $x^* \in h(p, \bar{u})$ имеем $u(x^*) = \bar{u}$;

3) если предпочтения выпуклы, то множество $h(p, \bar{u})$ выпукло;

4) если предпочтения строго выпуклы (следовательно, $u(\cdot)$ строго квазивогнутая), то множество $h(p, \bar{u})$ состоит из одного элемента, т.е. отображение является функцией компенсированного спроса;

5) имеет место закон компенсированного спроса: для любых $x' \in h(p', \bar{u})$ и $x'' \in h(p'', \bar{u})$ имеем $(p' - p'')(x' - x'') \leq 0$.

Доказательство

1. Изменение всех цен в одинаковой пропорции никак не отразится на допустимом множестве задачи $V_{\bar{u}}$, а приведет лишь к изменению расходов в той же пропорции, что никак не изменит решения задачи. Это означает однородность нулевой степени компенсированного спроса относительно цен.

2. Покажем, что для любого $x^* \in h(p, u)$ выполняется $u(x^*) = \bar{u}$. Предположим, что это не так и $u(x^*) > \bar{u}$. Тогда $u(x^*) > \bar{u} \geq u(0)$, откуда следует, что $x^* \neq 0$. Поскольку $p >> 0$, $x^* \geq 0$ и $x^* \neq 0$, то $px^* > 0$. Рассмотрим αx^* при $\alpha \in (0, 1)$. Поскольку $\alpha < 1$, то $\alpha px^* < px^*$ для любого $\alpha \in (0, 1)$. Кроме того, в силу непрерывности функции полез-

ности при α, стремящемся к единице, имеем $u(\alpha x^*) > u(x^*)$. Это означает, что x^* не является решением задачи минимизации расходов, поскольку есть другой набор, приносящий бóльшую полезность при меньших расходах. Мы пришли к противоречию, которое означает, что исходное предположение было неверно и, значит, $u(x^*) = \bar{u}$.

3. Возьмем два набора, являющихся решениями задачи минимизации расходов: $x,\ x' \in h(p, \bar{u})$. В силу того что оба набора решают одну и ту же задачу, им должны соответствовать одинаковые расходы: $px = px'$.

Рассмотрим $x'' = \alpha x + (1-\alpha)x'$, где $\alpha \in [0,\ 1]$. Заметим, что x'' принадлежит множеству $V_{\bar{u}}$ в силу выпуклости предпочтений: $\alpha x + (1-\alpha)x' \succsim x$, откуда имеем $u(x'') \geq \bar{u}$. Кроме того, набору x'' соответствует такой же уровень расходов, как и исходным наборам:

$$px'' = \alpha px + (1-\alpha)\,px' = px.$$

Это означает, что x'' также является решением задачи: $x'' \in h(p,\ \bar{u})$, т.е. $h(p,\ \bar{u})$ — выпуклое множество.

4. Предположим, что задача минимизации расходов при ценах p и желаемом уровне полезности $\bar{u}$ имеет два разных решения: $x \neq x'$ и $x,\ x' \in h(p,\ \bar{u})$. Как было замечено выше, обоим наборам должны соответствовать одинаковые расходы: $px = px'$. Рассмотрим $x'' = \alpha x + (1-\alpha)x'$, где $\alpha \in (0,\ 1)$. В силу строгой выпуклости предпочтений $x'' \succ x$, откуда имеем $u(x'') > u(x) \geq \bar{u}$. Кроме того, набору x'' соответствует такой же уровень расходов, как и исходным наборам:

$$px'' = \alpha px + (1-\alpha)\,px' = px.$$

Это означает, что x'' также является решением задачи: $x'' \in h(p,\ \bar{u})$, что противоречит утверждению 3.1(2), согласно которому для любого решения задачи минимизации расходов ограничение должно выполняться как равенство, а для x'' имеем $u(x'') > \bar{u}$. Полученное противоречие говорит о том, что задача не может иметь два разных решения.

5. Докажем закон спроса для компенсированного спроса. Поскольку любой набор из множества $h(p',\ \bar{u})$ дает минимальный уровень расходов при ценах p', то для любого $x' \in h(p',\ \bar{u})$

$$p'x' \le p'x \text{ для всех } x \in V_{\bar{u}}.$$

Аналогично для любого $x'' \in h(p'', \bar{u})$ имеем

$$p''x'' \le p''x \text{ для всех } x \in V_{\bar{u}}.$$

Эти неравенства, в частности, верны, если в качестве произвольных элементов из множества $V_{\bar{u}}$ будут взяты x' и x'':

$$p'x' \le p'x'' \text{ или } p'x' - p'x'' \le 0,$$

$$p''x'' \le p''x' \text{ или } p''x'' - p''x' \le 0.$$

Сложив эти неравенства, получим закон спроса для компенсированной функции спроса:

$$p'(x' - x'') - p''(x' - x'') = (p' - p'')(x' - x'') \le 0. \blacksquare$$

Если функция полезности дифференцируема, то решение задачи минимизации расходов можно охарактеризовать с помощью условий Куна — Таккера. Согласно теореме Куна — Таккера[3], если x^* — решение задачи минимизации расходов при $(p, \bar{u})$, то существует множитель $\mu \ge 0$ такой, что для любого товара i выполнены условия:

$$p_i \ge \mu \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i}; \quad p_i = \mu \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_i}, \text{ если } x_i^* > 0.$$

Соответственно внутреннее решение, так же как и в задаче максимизации полезности характеризуется равенством предельной нормы замещения между двумя благами и их относительными ценами:

$$MRS_{ij}(x^*) = \frac{\partial u(x^*)/\partial x_i}{\partial u(x^*)/\partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}.$$

Это совпадение не случайно. Между задачей минимизации расходов и задачей максимизации полезности существует тесная связь. Ниже мы сформулируем и докажем соответствующие утверждения относительно соотношений между решениями этих задач и значениями целевых функций. Однако прежде закончим анализ самой задачи минимизации расходов.

[3] В данной задаче выполнено условие регулярности, и потому мы можем использовать теорему Куна — Таккера.

Изучив свойства решения задачи минимизации расходов, обратим внимание на значение минимальных расходов. Подставив решение задачи в целевую функцию, мы получим зависимость уровня минимальных расходов от цен и уровня полезности. Полученную функцию, отражающую эту зависимость называют *функцией расходов*. В дальнейшем будем обозначать эту функцию через $e(p, \bar{u}) : e(p, \bar{u}) = = px^*$, где $x^* \in h(p, \bar{u})$.

Утверждение 3.2. Свойства функции расходов $e(p, \bar{u})$.

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция, представляющая предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$, $p >> 0$ и $\bar{u} > u(0)$. Тогда $e(p, \bar{u})$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) однородность первой степени относительно цен: $e(\lambda p, \bar{u}) = = \lambda e(p, \bar{u})$ для всех $\lambda > 0$;

2) возрастает по уровню полезности;

3) не убывает по ценам;

4) вогнута по ценам;

5) непрерывна;

6) если предпочтения строго выпуклые ($u(\cdot)$ строго квазивогнута) и функция $e(p, \bar{u})$ дифференцируема при $\bar{p} >> 0$, то во внутренних точках $(h(\bar{p}, \bar{u}) >> 0)$ имеет место лемма Шепарда $h_i(\bar{p}, \bar{u}) = \dfrac{\partial e(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_i}$.

Доказательство

1. Поскольку компенсированный спрос однородный нулевой степени по ценам, то при таком изменении цен меняется лишь стоимость оптимального набора и меняется в той же пропорции, в какой изменяются все цены.

2. Рассмотрим $u'' > u'$ и покажем, что $e(p, u'') > e(p, u')$. Пусть

$$x'' \in \arg\min_{x \in V_{u''}} px \quad \text{и} \quad x' \in \arg\min_{x \in V_{u'}} px.$$

Предположим, что $px'' \leq px'$. Поскольку $u(x'') > u'$, то $x'' \in V_{u'}$ и, следовательно, является решением задачи минимизации расходов при уровне полезности u', причем $u(x'') > u'$, что противоречит утверждению 3.1(2). Полученное противоречие доказывает утверждение.

3. Пусть $p'' \geq p'$. Обозначим через x'' и x' решения задачи минимизации расходов при ценах p'' и p' соответственно. Тогда

$$e(p', \bar{u}) = p'x' \leq p''x' \leq p''x'' = e(p'', \bar{u}).$$

4. Зафиксируем уровень полезности и рассмотрим два произвольных вектора цен p'' и p'. Обозначим через x'' и x' решения задачи минимизации расходов при ценах p'' и p' соответственно. Обозначим через $\tilde{p}$ линейную комбинацию двух векторов цен $\tilde{p} = \alpha p' + (1-\alpha)p''$, где $\alpha \in [0,\ 1]$ и пусть $\tilde{x}$ — решение задачи минимизации расходов при ценах $\tilde{p}$.

Поскольку x' дает минимальные расходы при ценах p', то любой другой допустимый набор, включая набор $\tilde{x}$, не может дать меньшие расходы:

$$e(p', \bar{u}) = p'x' \leq p'\tilde{x}.$$

Аналогично найдем, что

$$e(p'', \bar{u}) = p''x'' \leq p''\tilde{x}.$$

Домножим первое неравенство на α, второе — на $(1-\alpha)$ и сложим:

$$\alpha e(p', \bar{u}) + (1-\alpha)e(p'', \bar{u}) \leq \left(\alpha p' + (1-\alpha)p''\right)\tilde{x} = \tilde{p}\tilde{x} = e(\tilde{p}, \bar{u}).$$

Таким образом, мы доказали вогнутость функции расходов по ценам:

$$\alpha e(p', \bar{u}) + (1-\alpha)e(p'', \bar{u}) \leq e\left(\alpha p' + (1-\alpha)p'', \bar{u}\right).$$

5. Непрерывность функции расходов следует из теоремы о максимуме. Однако мы можем установить непрерывность и другим способом. Поскольку вогнутая функция непрерывна во внутренних точках области определения, то из предыдущего пункта следует непрерывность функции расходов по ценам.

6. Докажем лемму Шепарда. Продифференцировав функцию расходов по цене i-го товара, найдем

$$\frac{\partial e(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_i} = \frac{\partial\left(ph(\bar{p}, \bar{u})\right)}{\partial p_i} = h_i(\bar{p}, \bar{u}) + \sum_j p_j \frac{\partial h_j(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_i}.$$

Так как $h(\bar{p},\ \bar{u}) >> 0$, то из условий первого порядка для задачи минимизации расходов имеем

$$p_j = \mu \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_j}.$$

Подставим это выражение для каждой цены в найденную выше производную от функции расходов:

$$\frac{\partial e(\bar{p},\ \bar{u})}{\partial p_i} = h_i(\bar{p},\ \bar{u}) + \mu \sum_j \frac{\partial u(h)}{\partial h_j} \cdot \frac{\partial h_j(\bar{p},\ \bar{u})}{\partial p_i} = h_i(\bar{p},\ \bar{u}),$$

поскольку $\sum_j \frac{\partial u(h)}{\partial h_j} \cdot \frac{\partial h_j(\bar{p},\ \bar{u})}{\partial p_i} = 0.$ Равенство нулю этой суммы мы получаем, дифференцируя ограничение задачи минимизации расходов по p_i и учитывая, что это ограничение выполняется как равенство:

$$\frac{\partial u\big(h(\bar{p},\ \bar{u})\big)}{\partial p_i} = \sum_j \frac{\partial u(h)}{\partial h_j} \cdot \frac{\partial h_j(\bar{p},\ \bar{u})}{\partial p_i} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial p_i} = 0. \ \blacksquare$$

Поясним графически свойства 4 и 6. Для этого зафиксируем цены всех товаров, кроме *i*-го: $p_j = \bar{p}_j,\ j \neq i.$ Обозначим через $e(p_i)$ минимальные расходы при векторе цен $(\bar{p}_1,\ \ldots,\ \bar{p}_{i-1},\ p_i,\ \bar{p}_{i+1},\ \ldots,\ \bar{p}_N)$ и уровне полезности $\bar{u}$. Пусть при ценах $\bar{p} = (\bar{p}_1,\ \ldots,\ \bar{p}_{i-1},\ \bar{p}_i,\ \bar{p}_{i+1},\ \ldots,\ \bar{p}_N)$ потребительский набор $h(\bar{p},\ \bar{u})$ является решением задачи минимизации расходов, тогда $e(\bar{p}_i) = \bar{p}h(\bar{p},\ \bar{u})$. Предположим, что цена *i*-го товара изменилась и стала равна p_i, а все остальные цены остались прежними. Если при этом потребитель будет покупать старый набор товаров, то его расходы составят

$$\varphi(p_i) = p_i h_i(\bar{p},\ \bar{u}) + \sum_{j \neq i} \bar{p}_j h_j(\bar{p},\ \bar{u}).$$

Функцию $\varphi(p_i)$ назовем *функцией «наивного поведения»* потребителя. Если же он изменит приобретаемый набор так, чтобы при новых ценах издержки были минимальны, то его расходы при этом не возрастут, т.е. значение функции расходов при каждом значении p_i будет не больше величины $\varphi(p_i)$:

$$e(p_i) \le p_i h_i(\bar{p},\ \bar{u}) + \sum_{j \ne i} \bar{p}_j h_j(\bar{p},\ \bar{u}).$$

Кроме того, при начальном уровне цены i-го товара оба выражения дадут одинаковые расходы:

$$e(\bar{p}_i) = \bar{p}_i h_i(\bar{p},\ \bar{u}) + \sum_{j \ne i} \bar{p}_j h_j(\bar{p},\ \bar{u}).$$

Изобразим графически функцию «наивного поведения» $\varphi(p_i)$ и функцию расходов $e(p_i)$ (рис. 3.2). График функции $\varphi(p_i)$ — прямая с наклоном, равным $h_i(\bar{p},\ \bar{u})$. График функции $e(p_i)$ везде лежит ниже прямой $\varphi(p_i)$, и в точке $p_i = \bar{p}_i$ их значения совпадают, как это изображено на рис. 3.2. Так как такое соотношение между $\varphi(p_i)$ и $e(p_i)$ выполняется при любом выборе $\bar{p}_i$, то функция расходов вогнута по p_i и, более того, поскольку прямая $\varphi(p_i)$ является касательной к функции $e(p_i)$ в точке $p_i = \bar{p}_i$, то в этой точке их наклоны совпадают, и мы получаем лемму Шепарда:

$$\frac{\partial e(\bar{p},\ \bar{u})}{\partial p_i} = \frac{\partial\big(\varphi(\bar{p})\big)}{\partial p_i} = h_i(\bar{p},\ \bar{u}).$$

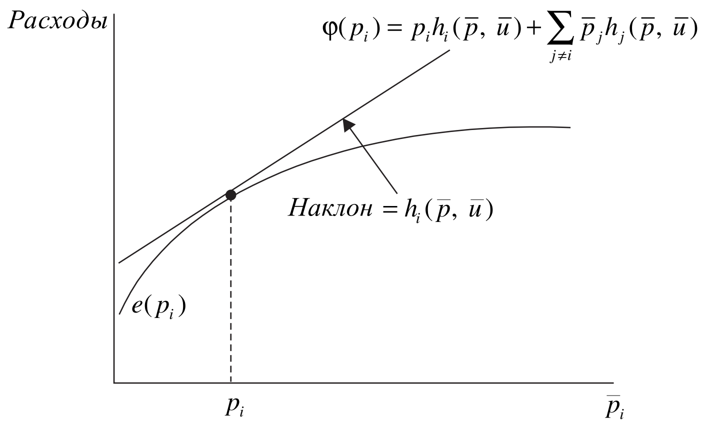

Рис. 3.2. Вогнутость функции расходов и лемма Шепарда

Лекция 4

Двойственность в теории потребителя

Как мы видели, задача максимизации полезности и задача минимизации расходов тесно связаны. Сформулируем и докажем утверждения относительно связи между решениями этих задач и значениями их целевых функций.

Утверждение 4.1. Теорема двойственности.

1. Пусть $u(\cdot)$ — функция полезности, представляющая локально ненасыщаемые предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$. Если x^* — решение задачи максимизации полезности при ценах $p >> 0$ и доходе $I > 0$, то x^* — решение задачи минимизации расходов при $\bar{u} = u(x^*)$. Более того, $e(p, \bar{u}) = I$.

2. Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$. Если x^* — решение задачи минимизации расходов при $p >> 0$ и $\bar{u} \geq u(0)$, то x^* — решение задачи максимизации полезности при ценах $p >> 0$ и доходе $I = e(p, \bar{u})$. Более того, $v(p, I) = \bar{u}$.

Доказательство

1. Предположим, что x^* не является решением задачи минимизации расходов при $\bar{u} = u(x^*)$. Следовательно, существует $x' \neq x^*$ такой, что $u(x') \geq \bar{u} = u(x^*)$ и $px' < px^* \leq I$. Это означает, что x' лежит внутри рассматриваемого бюджетного множества и, значит, существует окрестность x', целиком лежащая в этом множестве. В силу локальной ненасыщаемости в этой окрестности можно найти набор $\tilde{x}$ с большим, чем у набора x', значением полезности: $u(\tilde{x}) > u(x')$, причем $p\tilde{x} < I$. Это противоречит тому, что x^* — решение задачи максимизации полезности при данных ценах p и доходе I. Полученное противоречие означает, что наше предположение неверно и x^* является решением задачи минимизации расходов при $\bar{u} = u(x^*)$, т.е. $e(p, \bar{u}) = px^*$. В силу локальной ненасыщаемости бюджетное ограничение в задаче

максимизации полезности должно выполняться как равенство, т.е. $px^* = I$, откуда получаем искомый результат: $e(p, \bar{u}) = I$.

2. Предположим, что x^* не является решением задачи максимизации полезности при $I = px^*$. Тогда существует $x' \neq x^*$ такой, что $px' \leq I = px^*$ и $u(x') > u(x^*) \geq \bar{u}$. Поскольку x' удовлетворяет ограничению задачи минимизации расходов и стоит при ценах p не больше, чем оптимальный в задаче минимизации расходов набор x^*, то x' также является решением задачи минимизации расходов. Однако существование такого решения противоречит утверждению 3.1(2).

Полученное противоречие свидетельствует о том, что сделанное ранее предположение неверно и x^* является решением задачи максимизации полезности при $I = px^*$. Отсюда следует, что $v(p, I) = u(x^*)$. В силу 3.1(2) набор x^* удовлетворяет ограничению задачи минимизации расходов как равенству $u(x^*) = \bar{u}$, и в итоге получаем, что $v(p, I) = u(x^*) = \bar{u}$. ■

Из доказанного выше утверждения для локально ненасыщаемых непрерывных предпочтений мы получаем соотношения двойственности, связывающие задачу максимизации полезности и задачу минимизации расходов. *Тождества, связывающие функции маршалловского и компенсированного спроса:*

$$x(p, I) = h\big(p, v(p, I)\big);$$
$$h(p, \bar{u}) = x\big(p, e(p, \bar{u})\big).$$

Соотношения, связывающие косвенную функцию полезности и функцию расходов:

$$v\big(p, e(p, \bar{u})\big) = \bar{u};$$
$$e\big(p, v(p, I)\big) = I.$$

Используя эти соотношения двойственности, мы докажем *тождество Роя, связывающее маршалловский спрос и косвенную функцию полезности.*

Доказательство тождества Роя

Рассмотрим точку $p = \bar{p}$ и $I = \bar{I}$, где $v(\bar{p}, \bar{I}) = \bar{u}$.

Мы знаем, что при любом векторе цен p имеет место следующее соотношение:

$$v\left(p,\ e(p,\ \bar{u})\right)=\bar{u}.$$

Продифференцируем его по цене i-го товара и оценим в точке $p=\bar{p}$:

$$\frac{dv\left(\bar{p},\ e(\bar{p},\ \bar{u})\right)}{dp_i}=\frac{\partial v\left(\bar{p},\ e(\bar{p},\ \bar{u})\right)}{\partial p_i}+\frac{\partial v\left(\bar{p},\ e(\bar{p},\ \bar{u})\right)}{\partial I}\cdot\frac{\partial e(\bar{p},\ \bar{u})}{\partial p_i}=0.$$

В силу леммы Шепарда $\dfrac{\partial e(\bar{p},\ \bar{u})}{\partial p_i}=h_i(\bar{p},\ \bar{u})$. По соотношению двойственности для функции расходов $e(\bar{p},\ \bar{u})=\bar{I}$. В результате полученное выражение можно переписать как

$$\frac{\partial v(\bar{p},\ \bar{I})}{\partial p_i}+\frac{\partial v(\bar{p},\ \bar{I})}{\partial I}h_i(\bar{p},\ \bar{u})=0.$$

Выражая компенсированный спрос, с учетом соотношения двойственности для функций спроса получаем

$$x_i(\bar{p},\ \bar{I})=h_i\left(\bar{p},\ v(\bar{p},\ \bar{I})\right)=h_i(\bar{p},\ \bar{u})=-\frac{\partial v(\bar{p},\ \bar{I})/\partial p_i}{\partial v(\bar{p},\ \bar{I})/\partial I}.\ \blacksquare$$

Из соотношений двойственности мы знаем, как связаны маршалловский и компенсированный спрос. Используя эти соотношения, мы можем провести анализ сравнительной статики. Рассмотрим, как реагирует маршалловский спрос на изменение цены какого-либо товара. Ответ на этот вопрос в терминах эффектов дохода и замещения дает *уравнение Слуцкого.*

Утверждение 4.2. Уравнение Слуцкого.

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая строго выпуклые локально ненасыщаемые предпочтения потребителя, определенные на множестве $X=R_+^N$. Если $x(p,\ I)$ и $h(p,\ u)$ — дифференцируемые функции маршалловского и компенсированного спроса, то для всех $\bar{p}\gg 0$ и $\bar{I}>0$ имеет место *уравнение Слуцкого:*

$$\frac{\partial x_i(\bar{p},\ \bar{I})}{\partial p_j}=\frac{\partial h_i(\bar{p},\ \bar{u})}{\partial p_j}-x_j(\bar{p},\ \bar{I})\frac{\partial x_i(\bar{p},\ \bar{I})}{\partial I}.$$

Доказательство

Рассмотрим вектор цен $\bar{p} >> 0$ и доход $\bar{I} > 0$. Обозначим максимальный уровень полезности, достижимый при этих ценах и доходе через $\bar{u} = v(\bar{p}, \bar{I})$.

Воспользуемся соотношением двойственности, связывающим маршалловский и компенсированный спрос. Для любого вектора цен p:

$$h(p, \bar{u}) = x\big(p, e(p, \bar{u})\big).$$

Продифференцируем это тождество по цене i-го товара и оценим в точке $\bar{p}$:

$$\frac{\partial h_i(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i\big(\tilde{p}, e(\bar{p}, \bar{u})\big)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i\big(\bar{p}, e(\bar{p}, \bar{u})\big)}{\partial I} \cdot \frac{\partial e(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_j}.$$

По лемме Шепарда $\dfrac{\partial e(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_j} = h_j(\bar{p}, \bar{u})$. Используя этот факт и то, что $e(\bar{p}, \bar{u}) = \bar{I}$, получаем:

$$\frac{\partial h_i(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial p_j} + h_j(\bar{p}, \bar{u})\frac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial I}.$$

Из соотношения двойственности для j-го товара $h_i(\bar{p}, \bar{u}) = h_i(\bar{p}, v(\bar{p}, \bar{I})) = x_i(\bar{p}, \bar{I})$. Таким образом, подставляя маршалловский спрос вместо компенсированного, получаем искомое соотношение: $\dfrac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial p_j} = \dfrac{\partial h_i(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_j} - x_j(\bar{p}, \bar{I})\dfrac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial I}$. ■

Полученное уравнение позволяет разложить эффект изменения цены товара на две составляющие. Во-первых, это изменение спроса при данном уровне полезности (т.е. реакция на изменение относительных цен при неизменном уровне благосостояния), которое описывается первым слагаемым, стоящим в правой части уравнения Слуцкого, — изменением компенсированного спроса. Этот эффект мы называем *эффектом замещения*. Во-вторых, изменение цены влияет на покупательную способность фиксированного дохода, что при неизменных относительных ценах также влияет на спрос. Этот эффект, отражаемый вторым слагаемым, называют *эффектом дохода*.

Выведенное нами уравнение применимо в тех случаях, когда доход потребителя фиксирован (не зависит от цен). В действительности, если доход потребителя состоит не только из экзогенно заданной денежной суммы, но потребитель владеет и неким запасом товаров, то изменение цен будет влиять и на стоимость этого набора. Рассмотрим задачу потребителя при наличии натурального дохода и покажем, как выведенное выше уравнение можно обобщить на случай натурального дохода.

Итак, обозначим натуральный доход (*вектор первоначальных запасов*) потребителя через $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N)$, где ω_i — запас i-го товара. Тогда задача потребителя примет вид:

$$\max_{x \geq 0} \; u(x)$$

$$px \leq p\omega.$$

В результате спрос потребителя будет зависеть от цен и стоимости первоначального запаса $x(p, p\omega)$.

Утверждение 4.3. Уравнение Слуцкого для случая натурального дохода.

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая строго выпуклые локально ненасыщаемые предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$. Если $x(p, p\omega)$ — функция спроса при наличии натурального дохода, $x(p, I)$ — функция маршалловского спроса при фиксированном доходе и $h(p, u)$ — функция компенсированного спроса, то при условии дифференцируемости этих функций при $\bar{p} \gg 0$ имеет место *обобщенное уравнение Слуцкого*

$$\frac{dx_i(\bar{p}, \bar{p}\omega)}{dp_j} = \frac{\partial h_i(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_j} + \left(\omega_j - x_j(\bar{p}, \bar{p}\omega)\right)\frac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial I}.$$

Доказательство

Рассмотрим вектор цен $\bar{p} \gg 0$ и обозначим через $\bar{I}$ стоимость вектора первоначальных запасов при ценах $\bar{p} : \bar{I} = \bar{p}\omega$. Пусть $\bar{u}$ —

максимальный уровень полезности, достижимый при этих ценах и доходе: $\bar{u} = v(\bar{p}, \bar{I})$.

Влияние цены товара на рассматриваемый спрос $x(p, p\omega)$ можно поделить на два эффекта: изменение спроса при неизменной стоимости первоначального запаса и изменение спроса в силу изменения самой стоимости натурального дохода:

$$\frac{dx_i(\bar{p}, \bar{p}\omega)}{dp_j} = \frac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{dp_j} + \frac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial I} \cdot \frac{\partial(\bar{p}\omega)}{dp_j}.$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой эффект изменения спроса, вызванного изменением цены товара, при фиксированном доходе, а потому его можно разложить согласно уравнению Слуцкого для случая фиксированного дохода. В результате этого разложения имеем

$$\frac{dx_i(\bar{p}, \bar{p}\omega)}{dp_j} = \frac{\partial h_i(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_j} - x_j(\bar{p}, \bar{p}\omega)\frac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial I} + \omega_j \frac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial I} =$$

$$= \frac{\partial h_i(\bar{p}, \bar{u})}{\partial p_j} + \left(\omega_j - x_j(\bar{p}, \bar{p}\omega)\right)\frac{\partial x_i(\bar{p}, \bar{I})}{\partial I}. \blacksquare$$

Свойства функции расходов и уравнение Слуцкого позволяют нам сформулировать ряд дополнительных свойств функций спроса. Для этого введем понятие *матрицы коэффициентов замещения*. Эту матрицу еще называют *матрицей Слуцкого*. Договоримся обозначать эту матрицу через S. Элементами этой матрицы s_{ij} являются эффекты замещения для спроса на i-й товар при изменении цены j-го блага, т.е.

$s_{ij} \equiv \dfrac{\partial h_i(p, u)}{\partial p_j}$. С учетом уравнения Слуцкого каждый элемент матрицы может быть выражен через маршалловский спрос:

$$s_{ij} \equiv \frac{\partial h_i(p, u)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(p, I)}{\partial p_j} + x_j(p, I)\frac{\partial x_i(p, I)}{\partial I}.$$

Утверждение 4.4. Свойства матрицы замещения Слуцкого.

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная функция полезности, представляющая строго выпуклые локально ненасыщаемые предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$. Пусть функция расходов $e(p, u)$ дважды непрерывно дифференцируема, тогда матрица замещения Слуцкого $S(p, I)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $S(p, I)$ — симметричная матрица;
2) $S(p, I)$ — отрицательно полуопределенная матрица;
3) $pS(p, I) = 0$.

Доказательство

1. В силу леммы Шепарда $s_{ij} = \dfrac{\partial h_i(p, u)}{\partial p_j} = \dfrac{\partial^2 e(p, u)}{\partial p_i \partial p_j}$. Поскольку мы предполагали, что функция расходов дважды непрерывно дифференцируема, то по теореме Юнга $\dfrac{\partial^2 e(p, u)}{\partial p_i \partial p_j} = \dfrac{\partial^2 e(p, u)}{\partial p_j \partial p_i}$, откуда следует, что $s_{ij} = s_{ji}$, т.е. матрица Слуцкого симметрична.

2. Учитывая, что матрица замещения является матрицей вторых производных функции расходов, а функция расходов вогнута, то матрица $S(p, I)$ должна быть отрицательно полуопределенной.

3. Поскольку компенсированный спрос однородный нулевой степени по ценам, то в силу леммы Эйлера имеем $pS(p, I) = \sum_i p_i \dfrac{\partial h_i(p, u)}{\partial p_j} =$ $= 0.$ ■

Подведем итоги проведенному анализу задач максимизации полезности и минимизации расходов. Как показано на рис. 4.1, решения этих задач связаны соотношениями двойственности и, помимо этого, производные решения по ценам связаны уравнением Слуцкого. Значения задач согласно условиям двойственности являются обратными функциями при данном векторе цен. Косвенную функцию полезности мы получаем, подставляя маршалловский спрос в целевую функцию, а с помощью тождества Роя можно совершить обратную операцию: из косвенной функции полезности получить функции маршалловского спроса. Аналогично подстановкой компенсированного спроса в целевую функцию мы получаем функцию расходов, а применяя лемму Шепарда, из функции расходов находим компенсированный спрос.

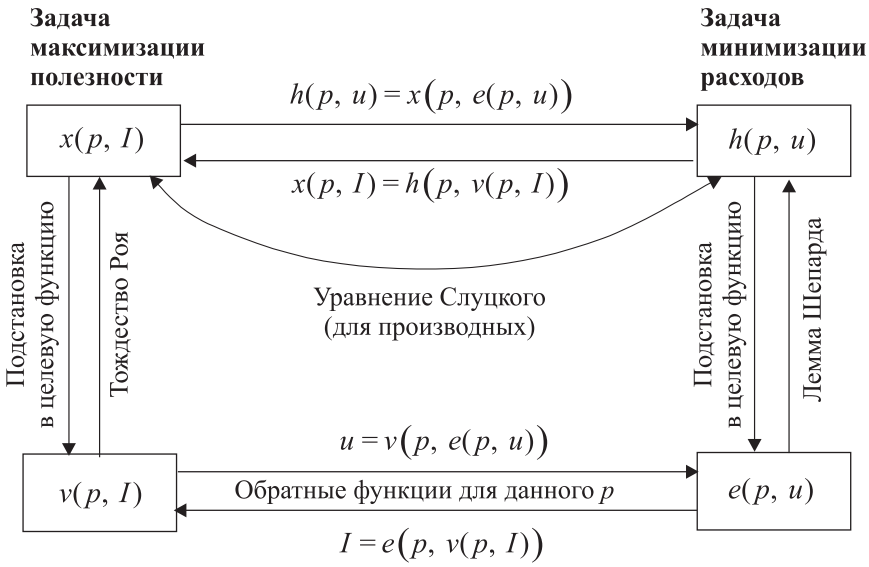

Рис. 4.1. Взаимосвязь задачи максимизации полезности и задачи минимизации расходов

Лекция 5

Задача восстановления предпочтений

Как мы видели, непрерывно дифференцируемые функции маршалловского спроса должны удовлетворять следующим условиям: они однородные нулевой степени по ценам и доходу, удовлетворяют бюджетному ограничению как равенству, и, кроме того, образованная их производными матрица Слуцкого является симметричной и отрицательно полуопределенной. Это список необходимых свойств функций спроса, полученных нами на основе анализа модели спроса рационального потребителя. Является ли этот список достаточным для существования рациональных предпочтений, порождающих функции спроса $x(p,\ I)$? Для ответа на этот вопрос обратимся к задаче восстановления предпочтений на основе информации о функциях маршалловского спроса.

Разделим задачу восстановления предпочтений на два этапа. Сначала попытаемся на основе маршалловского спроса восстановить функцию расходов, а затем рассмотрим вопрос восстановления предпочтений по функции расходов.

1. Восстановление функции расходов

Рассмотрим сначала случай двух товаров $(N=2)$. Этот случай удобен тем, что, положив цену одного из товаров равной единице, мы можем в дальнейшем работать лишь с одной ценой. Итак, пусть $p_2=1$. Выберем произвольную первоначальную точку: цену первого товара p_1^0 и доход I^0. Поскольку нам известны функции маршалловского спроса, то мы можем найти спрос для этих параметров $x(p_1^0,\ 1,\ I^0)$. Присвоим этому потребительскому набору уровень полезности u^0. Восстановим расходы как функцию от цены первого товара при уровне полезности u^0. Поскольку цену второго товара и уровень полезности мы зафиксировали, то будем рассматривать расходы только как функцию цены первого товара $e(p_1)=e(p_1,\ 1,\ u^0)$. В силу леммы Шепарда имеем

$$\frac{\partial e(p_1)}{\partial p_1}=h_1(p_1,\ 1,\ u^0).$$

Компенсированный спрос ненаблюдаем, и мы имеем информацию только о маршалловском спросе. Однако, используя соотношение двойственности, мы можем перейти от компенсированного спроса к маршалловскому: $h_1(p_1,\ 1,\ u^0)=x_1\left(p_1,\ 1,\ e(p_1,\ 1,\ u^0)\right)$. Подставим вместо компенсированного спроса маршалловский, обозначив $x_1\left(p_1,\ e(p_1)\right)=x_1\left(p_1,\ 1,\ e(p_1,\ 1,\ u^0)\right)$, и получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial e(p_1)}{\partial p_1} = x_1\left(p_1, e(p_1)\right)$$

при первоначальном условии $e(p_1^0) = I^0$.

Заметим, что решение данного уравнения даст функцию, которая имеет свойства функции расходов. Убедимся, что это действительно так.

Поскольку мы находим, что при любых ценах и доходах спрос неотрицателен, то

$$\frac{\partial e(p_1)}{\partial p_1} = x_1\left(p_1,\ e(p_1)\right) \geq 0.$$

Это означает, что расходы не убывают по цене.

Мы находим функцию расходов из решения дифференциального уравнения, а это означает, что полученная функция будет непрерывной.

Предполагалось, что функции маршалловского спроса порождают отрицательно полуопределенную матрицу замещения Слуцкого. Учитывая, что эта матрица является матрицей вторых производных функции расходов по ценам, мы можем заключить, что построенная функция будет вогнутой по ценам. Таким образом, решив приведенное выше дифференциальное уравнение при начальном условии, мы получим функцию расходов.

Рассмотрим обобщение задачи на случай N товаров. В этом случае, применяя лемму Шепарда для N товаров, мы придем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial e(p)}{\partial p_1} = x_1\left(p,\ e(p)\right) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial e(p)}{\partial p_N} = x_N\left(p,\ e(p)\right) \end{cases}.$$

при начальном условии $e(p^0) = I^0$. Для того чтобы эта система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы матрица вторых производных функции $e(p)$ была симметричной и отрицательно полуопределенной. И это действительно так в нашем случае, поскольку матрица вторых производных $e(p)$ является матрицей Слуцкого, которая, согласно сделанным нами предположениям, удовлетворяет этим свойствам.

2. Восстановление предпочтений по функции расходов

Мы знаем, как для каждого уровня полезности восстановить соответствующую функцию расходов по наблюдаемому маршалловскому спросу. Теперь нам предстоит решить, каким образом мы сможем по функции расходов восстановить предпочтения потребителя? Попытаемся для каждого уровня полезности $\bar{u}$ восстановить множество $V_{\bar{u}} = \{x \in X : u(x) \geq \bar{u}\}$.

Рассмотрим уровень полезности u^0 и построим множество

$$\tilde{V}_{u_0} = \{x \in R_+^N : px \geq e(p,\ u^0)\ \ \forall \quad p >> 0\}.$$

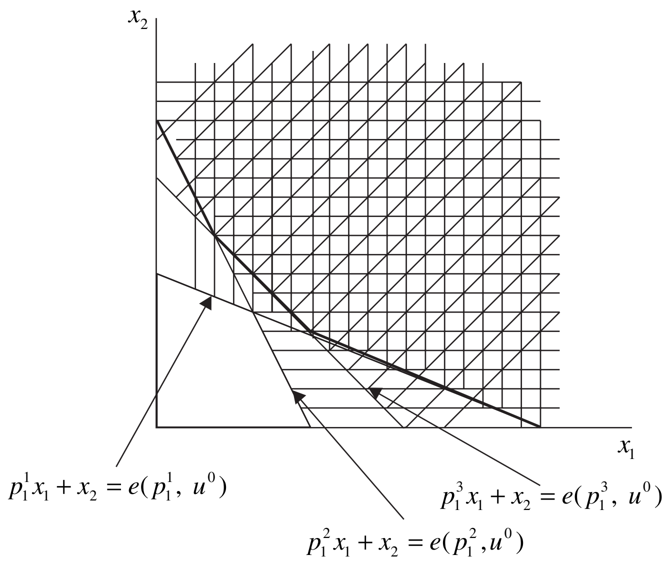

Рис. 5.1. Восстановление предпочтений по функции расходов

Проиллюстрируем процесс построения этого множества для случая двух товаров с помощью рис. 5.1. Итак, зафиксируем цену одного из товаров: пусть $p_2 = 1$. Рассмотрим некое значение цены первого товара $p_1 = p_1^1$ и найдем соответствующие расходы $e(p_1^1,\ u^0)$. Изобразим на графике в первом ортанте (нас интересует лишь неотрицательное потребление) решение неравенства $p_1^1 x_1 + x_2 \geq e(p_1^1,\ u^0)$. Теперь рассмотрим другую цену первого товара $p_1 = p_1^2$ и соответствующий уровень расходов $e(p_1^2,\ u^0)$. Решим графически неравенство $p_1^2 x_1 + x_2 \geq e(p_1^2,\ u^0)$. Снова изменим цену первого товара и получим третье неравенство и т.д. В итоге мы должны взять только те точки, которые удовлетворяют решению всех неравенств, перебрав при этом все возможные неотрицательные значения цены первого товара. Как видно из рисунка, с каждой последующей итерацией граница множества становится все более сглаженной.

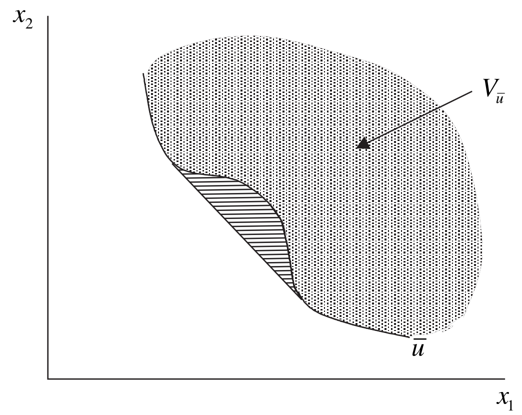

Рис. 5.2. Различие между истинными и восстановленными предпочтениями при невыпуклости предпочтений

Итак, следуя описанной выше процедуре, мы можем для каждого уровня полезности $\bar{u}$ построить множество $\tilde{V}_{\bar{u}}$. Теперь нам нужно ответить на несколько вопросов. Во-первых, действительно ли восстановленное множество будет порождать ту же функцию расходов, что и исходное? Во-вторых, будет ли само восстановленное множество $\tilde{V}_{\bar{u}}$ в точности совпадать с исходным? По построению множества $\tilde{V}_{\bar{u}}$ мы видим, что оно получается как пересечение выпуклых множеств, а потому и само является выпуклым. Это означает, что если предпочтения потребителя не являются выпуклыми, то восстановленное множество может не совпадать с исходным. В этом случае мы можем рассчитывать на восстановление лишь выпуклой оболочки истинного множества $\tilde{V}_{\bar{u}}$, как показано на рис. 5.2. Точки из горизонтально заштрихованной области не принадлежали исходному множеству $V_{\bar{u}}$, но будут принадлежать восстановленному множеству $\tilde{V}_{\bar{u}}$.

Утверждение 5.1. Связь исходных и восстановленных предпочтений.

1. Пусть $e(p,\ \bar{u})$ — функция расходов для рациональных, непрерывных предпочтений, определенных на множестве $X = R_{+}^{N}$ и представленных множеством $\tilde{V}_{\bar{u}}$. Если $\tilde{V}_{\bar{u}}$ — множество, восстановленное на основе этой функции расходов: $\tilde{V}_{\bar{u}} = \{x \in R_{+}^{N} : px \geq e(p,\ \bar{u})\ \ \forall\ \ p >> 0\}$, то для всех $p >> 0$ $e(p, \bar{u}) = \min\limits_{x \in \tilde{V}_{\bar{u}}} px$.

2. Если, кроме того, предпочтения потребителя выпуклы и слабо монотонны, то $\tilde{V}_{\bar{u}} = V_{\bar{u}}$.

Доказательство

1. Рассмотрим произвольный элемент из $\tilde{V}_{\bar{u}}$ и покажем, что он будет принадлежать восстановленному множеству $\tilde{V}_{\bar{u}}$. Итак, пусть $x \in \tilde{V}_{\bar{u}}$, тогда $px \geq e(p,\ \bar{u})$. Согласно определению $\tilde{V}_{\bar{u}}$ это означает, что $x \in \tilde{V}_{\bar{u}}$. Таким образом, $V_{\bar{u}} \subset \tilde{V}_{\bar{u}}$. Отсюда, в частности, следует, что множество $\tilde{V}_{\bar{u}}$ непусто. Заметим, что для каждого уровня полезности множество $\tilde{V}_{\bar{u}}$ замкнутое и ограниченное снизу. Ограниченность снизу следует из того, что $\tilde{V}_{\bar{u}}$ — подмножество R_{+}^{N} и, значит, $x \geq 0$. Итак, мы минимизируем непрерывную функцию (px) на непустом замкнутом, ограниченном снизу множестве, следовательно, решение задачи $\min\limits_{x \in \tilde{V}_{\bar{u}}} px$ существует.

Поскольку выше было установлено, что $V_{\bar{u}} \subset \tilde{V}_{\bar{u}}$, то мы можем заключить, что $e(p,\ \bar{u}) = \min\limits_{x \in V_{\bar{u}}} px \geq \min\limits_{x \in \tilde{V}_{\bar{u}}} px$.

Предположим, что существует вектор цен $p^{*} >> 0$ такой, что $e(p^{*},\ \bar{u}) > \min\limits_{x \in \tilde{V}_{\bar{u}}} p^{*}x$. Пусть минимум $\min\limits_{x \in \tilde{V}_{\bar{u}}} p^{*}x = p^{*}x^{*}$. Поскольку $x^{*} \in \tilde{V}_{\bar{u}}$, то по определению этого множества имеем $p^{*}x^{*} > e(p^{*},\ \bar{u})$, но это противоречит нашему предположению о том, что $e(p^*,\ \bar{u}) > \min\limits_{x\in\tilde{V}_{\bar{u}}} p^*x.$ Таким образом, для всех $p >> 0$ имеем $e(p,\ \bar{u}) = \min\limits_{x\in\tilde{V}_{\bar{u}}} px.$

2. Доказывая первую часть утверждения, мы показали, что $V_{\bar{u}} \subset \tilde{V}_{\bar{u}}$. Убедимся, что при выпуклости и слабой монотонности предпочтений имеет место и обратное включение $\tilde{V}_{\bar{u}} \subset V_{\bar{u}}$. Предположим, что это не так, т.е. существует $\tilde{x} \in V_{\bar{u}}$ и при этом $\tilde{x} \notin V_{\bar{u}}$. Поскольку множество $V_{\bar{u}}$ непустое, выпуклое (в силу выпуклости предпочтений), замкнутое и $\tilde{x} \in V_{\bar{u}}$, то по теореме о разделяющей гиперплоскости существует вектор $p^* \neq 0$ такой, что для любого $x \in V_{\bar{u}}$ имеем $p^*x > p^*\tilde{x}.$

Покажем, что $p^* \geq 0,$ т.е. данный вектор можно рассматривать в качестве вектора цен. Предположим, что для некоторого товара $p_i^* < 0.$ Рассмотрим некий элемент множества $V_{\bar{u}} : x \in V_{\bar{u}}$. Модифицируем этот набор, оставляя неизменными все координаты кроме i-й и увеличивая i-ю координату: $x' = x + \lambda e_i$, где e_i — вектор, все координаты которого равны нулю, кроме i-й, которая равна единице. В силу слабой монотонности предпочтений $x' \in V_{\bar{u}}$ для любого $\lambda \geq 0.$ Рассмотрим стоимость набора x' при ценах $p^* : p^*x' = p^*x + \lambda p_i^*$. Заметим, что последнее слагаемое отрицательно и, увеличивая $\lambda,$ мы можем сделать его сколь угодно большим (по модулю). В результате при достаточно большом λ мы получим $p^*x' < p^*\tilde{x},$ что противоречит тому, что $x' \in V_{\bar{u}}$. Таким образом, мы показали, что $p^* \geq 0.$

Докажем, что существует разделяющая гиперплоскость, нормаль которой имеет только положительные координаты, т.е. существует $p' >> 0$ такой, что для любого $x \in V_{\bar{u}}$ имеем $p'x > p'\tilde{x}.$ Построим p' на основе $p^*,$ увеличив все нулевые координаты вектора p^* (если таковые окажутся) на $\varepsilon > 0.$

Если соответствующие координаты вектора $\tilde{x}$ также нулевые, то $p'x \geq p^*x > p^*\tilde{x} = p^*\tilde{x} + \varepsilon \cdot 0 = p'\tilde{x}$ для любого $x \in V_{\bar{u}}$.

Пусть существует $\tilde{x}_i > 0$ и $p_i^* = 0.$ Покажем, что всегда можно выбрать ε достаточно маленьким, чтобы выполнялось условие $p'x > p'\tilde{x}$ для любого $x \in V_{\bar{u}}$. Поскольку для любого $x \in V_{\bar{u}}$ имеем $p^*x > p^*\tilde{x},$ то найдется число $c > 0$ такое, что $p^*x > p^*\tilde{x} + c$ для любого $x \in V_{\bar{u}}$. Положим $\varepsilon = \dfrac{0,5c}{\sum\limits_i \tilde{x}_i} > 0,$ тогда для любого $x \in V_{\bar{u}}$ имеем

$$p'x > p^* x > p^* \tilde{x} + c > p^* \tilde{x} + \sum_i \varepsilon \tilde{x}_i = p' \tilde{x}.$$

Итак, для любого $x \in V_{\bar{u}}$ имеем $p'x > p'\tilde{x}$ и $p' >> 0$. Пусть x' дает минимальные расходы при ценах $p' >> 0$ на множестве $V_{\bar{u}}$. Это означает, что $x' \in V_{\bar{u}}$ и $p'x' = e(p', \bar{u})$. Поскольку $x' \in V_{\bar{u}}$, то $p'x' > p'\tilde{x}$, т.е. $e(p', \bar{u}) > p'\tilde{x}$, а это противоречит тому, что $\tilde{x} \in \tilde{V}_{\bar{u}}$. Полученное противоречие доказывает, что $\tilde{V}_{\bar{u}} \subset V_{\bar{u}}$. Это вместе с доказанным ранее включением $V_{\bar{u}} \subset \tilde{V}_{\bar{u}}$ означает, что $V_{\bar{u}} = \tilde{V}_{\bar{u}}$. ■

Используя доказанное утверждение о соотношении исходного множества $V_{\bar{u}}$ и восстановленного $\tilde{V}_{\bar{u}}$, мы можем еще раз вернуться к рассмотренному выше примеру невыпуклых предпочтений, изображенных на рис. 5.2. Как видим, все «лишние» точки множества $V_{\bar{u}}$ (точки из горизонтально заштрихованной области) появились в силу того, что они не могут быть отделены от множества $V_{\bar{u}}$ никакой гиперплоскостью.

Однако проблемы могут возникнуть не только в силу невыпуклости предпочтений, но и при отсутствии слабой монотонности предпочтений. Продемонстрируем это с помощью рис. 5.3. Рассмотрим, к примеру, точку x^*. Эта точка не принадлежит множеству $V_{\bar{u}}$, но она будут принадлежать восстановленному множеству. Это объясняется тем, что точка x^* может быть отделена от множества $V_{\bar{u}}$ лишь прямой с положительным наклоном, а это значит, что никакие неотрицательные цены не могут породить такую прямую.

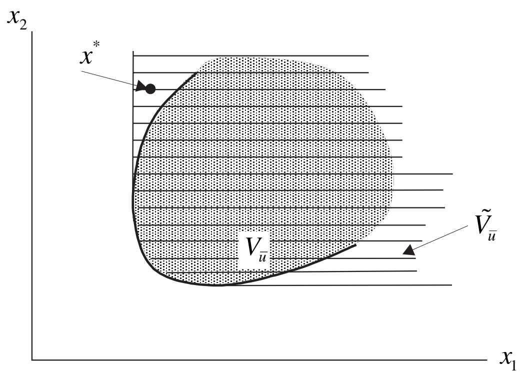

Рис. 5.3. Различие между истинными и восстановленными предпочтениями при немонотонности предпочтений

Итак, мы показали, что по функции расходов мы можем восстановить множество $\tilde{V}_{\bar{u}}$. Если предпочтения выпуклы и слабо монотонны, то восстановленное множество в точности совпадет с истинным, а значит, мы восстановим предпочтения потребителя. Но даже в том случае, когда в силу невыпуклости и (или) немонотонности предпочтений нам не удается в точности восстановить исходное множество $V_{\bar{u}}$, с точки зрения экономического выбора возникающие расхождения не имеют значения, поскольку выбор потребителя ни при каких ценах не может находиться в невосстановленных областях. В этом нас убеждает тот факт, что восстановленные предпочтения порождают ту же функцию расходов, что и истинные предпочтения потребителя.

Наконец, исследуем такой вопрос. Рассмотрим произвольную функцию, удовлетворяющую всем свойствам функции расходов. Можно ли утверждать, что эта функция действительно будет являться функцией расходов какого-то потребителя? Рассмотрим предпочтения, представимые восстановленным по данной функции множеством $\tilde{V}_u$, и покажем, что эта функция будет давать минимальные расходы на этом множестве.

Утверждение 5.2. Восстановление предпочтений по функции расходов.

Пусть $e(p,\ u)$ — непрерывная функция, возрастающая по u, однородная первой степени, вогнутая и дифференцируемая по p, тогда $e(p,\ u)$ является функцией расходов для предпочтений, описываемых множествами $\tilde{V}_u$, т.е.

$$e(p,\ u) = \min_{x \in \tilde{V}_u} px, \text{ где } \tilde{V}_u = \{x \in R_+^N : px \geq e(p,\ u) \ \ \forall \ \ p >> 0\}.$$

Доказательство

Не будем приводить доказательство, поскольку позже докажем аналогичное утверждение в теории производства.

Лекция 6

Измерение изменений в благосостоянии потребителя. Агрегирование в теории потребителя

Измерение изменений в благосостоянии потребителя

При анализе экономической политики часто требуется оценить, как та или иная мера отразится на благосостоянии потребителей. В курсах микроэкономики промежуточного уровня в качестве меры благосостояния использовалась концепция потребительского излишка. Однако, как будет показано ниже, эта концепция является точной мерой благосостояния только для случая квазилинейных предпочтений. Как же измерить изменение в благосостоянии потребителя для произвольных предпочтений? Как мы помним, функция полезности была введена как функция, позволяющая нам упорядочить потребительские наборы. Само же изменение уровня полезности указывает лишь на то, выиграл или проиграл потребитель от проводимой политики, но не позволяет оценить размер выигрыша или потерь.

Тем не менее можно разными способами измерить изменения в благосостоянии на основе специальных (измеренных в деньгах) функций полезности. Это измерение удобно охарактеризовать в терминах описанной в предыдущих лекциях теории двойственности. Поскольку нас интересует денежный измеритель полезности, то попытаемся для построения соответствующей оценки использовать известное нам соотношение двойственности, которое связывает косвенную функцию полезности и функцию расходов. Для каждого уровня полезности мы можем определить минимальные расходы, которые необходимы для достижения данного уровня полезности при некоторых ценах, и далее вместо сопоставления уровней полезности мы сможем сопоставлять соответствующие минимальные расходы, определенные при одних и тех же ценах.

Например, рассмотрим экономическую политику, в результате которой вектор цен изменился от p^0 до p^1, а доход потребителя остался прежним. Мы можем оценить соответствующее изменение благосостояния потребителя в неких постоянных ценах, которые обозначим через $\bar{p}$, как разницу расходов: $e\left(\bar{p},\ v(p^1,\ I)\right) - e\left(\bar{p},\ v(p^0,\ I)\right)$. Полученная мера несвободна от недостатков. Очевидно, что в общем случае, беря в качестве цен сопоставления $\bar{p}$ разные вектора цен, мы будем получать разные оценки изменения благосостояния. Принято в качестве цен сопоставления выбирать либо исходный вектор цен p^0, либо финальный вектор цен p^1.

В зависимости от того, какой именно из двух рассмотренных выше векторов цен будет использоваться в качестве цен сопоставления, мы получим две меры благосостояния, которые носят названия *эквивалентной* и *компенсирующей* вариации.

Итак, выбирая в качестве сопоставимых цен исходные цены p^0, мы ищем ответ на следующий вопрос: какое изменение в доходе будет для потребителя эквивалентно данному изменению цен, т.е. изменит благосостояние потребителя так же, как оно изменилось в силу изменения цен. Ответом на этот вопрос является изменение в доходе, называемое *эквивалентной вариацией* (сокращенно *EV* — от английского *equivalent variation*):

$$EV(p^0,\ p^1,\ I) = e\left(p^0,\ v(p^1,\ I)\right) - e\left(p^0,\ v(p^0,\ I)\right) = e\left(p^0,\ v(p^1,\ I)\right) - I.$$

Используя в качестве сопоставимых цен новые цены p^1, мы отвечаем на вопрос, какое изменение в доходе вернет потребителя к первоначальному уровню благосостояния при новых ценах. Ответом на этот вопрос является изменение в доходе, называемое *компенсирующей вариацией* (сокращенно *CV* — от английского *compensating variation)*:

$$CV(p^0,\ p^1,\ I) = e\left(p^1,\ v(p^1,\ I)\right) - e\left(p^1,\ v(p^0,\ I)\right) = I - e\left(p^1,\ v(p^0,\ I)\right).$$

Проиллюстрируем приведенные определения компенсирующей и эквивалентной вариаций дохода графически для случая двух товаров. Итак, пусть цена второго товара фиксирована, а цена первого товара падает: $p_1^1 < p_1^0$. В результате, как показано на рис. 6.1, благосостояние потребителя улучшается: потребитель перемещается с кривой безразличия u^0 на кривую $u^1 > u^0$. Для того чтобы найти эквивалентную вариацию, проведем касательную к новой кривой безразличия при старых ценах. Вертикальное расстояние между первоначальным бюджетным ограничением и построенной касательной даст нам эквивалентную вариацию в терминах второго товара. Теперь построим касательную к старой кривой безразличия при новых ценах. Вертикальное расстояние между бюджетным ограничением после изменения цены и построенной касательной даст нам компенсирующую вариацию в терминах второго товара.

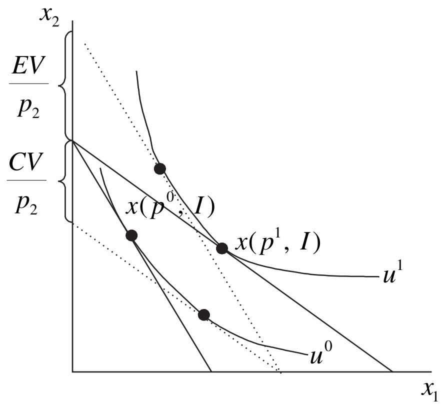

Рис. 6.1. Эквивалентная и компенсирующая вариации как меры изменения благосостояния потребителя, вызванного снижением цены первого товара

Рассмотренные выше оценки изменения благосостояния потребителя можно изобразить и на другом графике в случае, когда изменяется цена лишь одного из товаров. Воспользовавшись леммой Шепарда, можно представить CV и EV как площади под соответствующими кривыми компенсированного спроса. Действительно, рассмотрим случай N товаров и предположим, что изменяется цена лишь одного товара, скажем i-го, а цены остальных остаются прежними: $p_i^1 \neq p_i^0$, $p_j^1 = p_j^0$ для всех $j \neq i$. Обозначив величину $v(p^0, I)$ через u^0, запишем лемму Шепарда для i-го товара:

$$\frac{\partial e(p,\, u^0)}{\partial p_i} = h_i(p,\, u^0).$$

Проинтегрировав по цене i-го товара от p_i^1 до p_i^0, найдем

$$\int_{p_i^1}^{p_i^0} h_i(p,\ u^0)dp_i = \int_{p_i^1}^{p_i^0} \frac{\partial e(p,\ u^0)}{\partial p_i}dp_i = e(p^0,\ u^0) - e(p^1,\ u^0) = CV.$$

Компенсирующую вариацию можно представить как площадь под кривой компенсированного спроса, соответствующей исходному уровню полезности, лежащую между новой и исходной ценой i-го товара. Аналогично, записав лемму Шепарда для нового уровня полезности $u^1 = v(p^1,\ I)$ и проинтегрировав, получим выражение для эквивалентной вариации:

$$\int_{p_i^1}^{p_i^0} h_i(p,\ u^1)dp_i = \int_{p_i^1}^{p_i^0} \frac{\partial e(p,\ u^1)}{\partial p_i}dp_i = e(p^0,\ u^1) - e(p^1,\ u^1) = EV.$$

Таким образом, мы можем представить эти вариации графически. Пусть цена товара i падает (причем этот товар потребляется в положительном количестве), тогда $u^1 > u^0$. Соответствующие эквивалентная и компенсирующая вариации представлены на рис. 6.2.

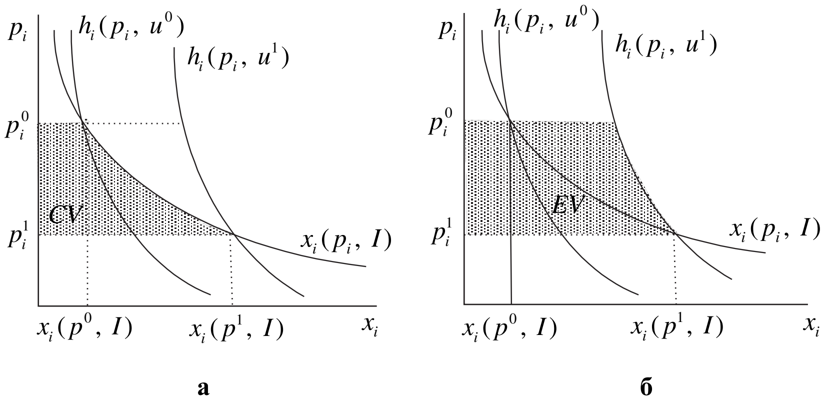

Рис. 6.2. Компенсирующая (**а**) и эквивалентная (**б**) вариации как меры изменения благосостояния потребителя, вызванного снижением цены i-го товара при $p_j^1 = p_j^0,\ j \neq i$

Сопоставляя рисунки 6.2а и 6.2б, мы видим, что эквивалентная вариация для рассматриваемого случая оказалась больше компенсирующей вариации. Всегда ли это так? Попытаемся сопоставить эквивалентную и компенсирующую вариации в общем случае. В основе данного сопоставления будет лежать теория двойственности.

Утверждение 6.1. Соотношение между эквивалентной и компенсирующей вариациями.

Пусть $u(\cdot)$ — непрерывная строго квазивогнутая функция полезности, представляющая локально ненасыщаемые предпочтения потребителя, определенные на множестве $X = R_+^N$. Пусть цены всех товаров кроме i-го фиксированы $(p_{-i} = \bar{p}_{-i})$, а цена i-го товара изменяется от p_i^0 до $p_i^1 < p_i^0$, причем $x_i(p_i^0, \bar{p}_{-i}) > 0$ и $x_i(p_i^1, \bar{p}_{-i}) > 0$. Тогда:

1) $CV(p^0, p^1, I) < EV(p^0, p^1, I)$, если товар i — нормальный при $p_i \in [p_i^1, p_i^0]$, $\bar{p}_{-i}$ и доходе I;

2) $CV(p^0, p^1, I) > EV(p^0, p^1, I)$, если товар i — инфериорный при $p_i \in [p_i^1, p_i^0]$, $\bar{p}_{-i}$ и доходе I;

3) $CV(p^0, p^1, I) = EV(p^0, p^1, I)$, если товар i — нейтральный к доходу (т.е. спрос на товар не зависит от дохода) при $p_i \in [p_i^1, p_i^0]$, $\bar{p}_{-i}$ и доходе I.

Доказательство

Зафиксируем все цены кроме i-й и рассмотрим изменение (снижение) цены i-го товара от p_i^0 до p_i^1. Тогда, в силу невозрастания косвенной функции полезности по ценам имеем $u^1 =$
$= v(p_i^1, \bar{p}_{-i}, I) \geq v(p_i^0, \bar{p}_{-i}, I) = u^0$, причем неравенство будет строгим, если потребление i-го товара было отлично от нуля, а предпочтения локально ненасыщаемы. Учитывая, что функция расходов возрастает по u, имеем $e(p_i, \bar{p}_{-i}, u^1) > e(p_i, \bar{p}_{-i}, u^0)$ для любого p_i. Тогда, если товар i нормальный, то с учетом соотношений двойственности имеем

$$h_i(p_i, \bar{p}_{-i}, u^1) = x_i\left(p_i, \bar{p}_{-i}, e(p_i, \bar{p}_{-i}, u^1)\right) > x_i\left(p_i, \bar{p}_{-i}, e(p_i, \bar{p}_{-i}, u^0)\right) =$$
$$= h_i(p_i, \bar{p}_{-i}, u^0).$$

Проинтегрировав это неравенство от p_i^1 до $p_i^0 > p_i^1$, найдем соотношения между CV и EV:

$$CV = \int_{p_i^1}^{p_i^0} h_i(p_i, \overline{p}_{-i}, u^0)dp_i < \int_{p_i^1}^{p_i^0} h_i(p_i, \overline{p}_{-i}, u^1)dp_i = EV.$$

Итак, при снижении цены нормального товара компенсирующая вариация меньше эквивалентной. Поскольку эти неравенства были выведены на основе реакции маршалловского спроса на изменение дохода, то для случая инфериорного товара мы получим обратные соотношения для мер благосостояния: $CV > EV$. Если же эффект дохода отсутствует, то маршалловский спрос на данный товар при разных уровнях дохода будет одинаков и в результате компенсирующая вариация совпадет с эквивалентной. Такая ситуация будет иметь место в случае квазилинейных предпочтений при достаточно большом доходе в отношении всех благ, кроме товара-измерителя, входящего линейно в функцию полезности. ■

Агрегирование в теории потребителя

Рассмотрев в предыдущих лекциях поведение индивидуального спроса, мы подошли к вопросу об агрегировании спроса отдельных потребителей в совокупный (рыночный) спрос. Определим совокупный спрос на каждый товар как сумму индивидуальных величин спроса всех потребителей:

$$x(p, I^1, I^2, \ldots, I^M) = \sum_{k=1}^{M} x^k(p, I^k),$$

где k — индекс потребителя.

После построения агрегированного спроса нас будет интересовать, унаследует ли совокупный спрос свойства индивидуального спроса. В частности выделим следующие три вопроса, которые будут лежать в центре нашего дальнейшего анализа.

1. При каких условиях совокупный спрос может быть представлен как функция цен и суммарного дохода потребителей:

$x(p, \sum_{k=1}^{M} I^k) \overset{?}{=} \sum_{k=1}^{M} x^k(p, I^k)$? Этот вопрос интересен с точки зрения эконометрических исследований, поскольку дизагрегированные данные по доходам и соответствующему им спросу зачастую отсутствуют. Поэтому необходимо понять, можно ли использовать агрегированные данные при построении функций спроса.

2. При каких условиях совокупный спрос будет удовлетворять слабой аксиоме выявленных предпочтений, т.е. унаследует ли совокупный спрос это свойство индивидуального спроса?

3. При каких условиях совокупный спрос является спросом некоего фиктивного потребителя, которого мы будем называть *репрезентативным* потребителем. И кроме того, если такой репрезентативный потребитель существует, то можно ли использовать его предпочтения для анализа изменений в благосостоянии (последствий изменений цен)? Это вопрос важен потому, что современная макроэкономика фактически целиком построена на предпосылке о существовании репрезентативного потребителя. Необходимо определить, насколько ограничителен подобный подход.

1. Агрегированный спрос как функция от совокупного дохода

Для того чтобы совокупный спрос был представим как функция от суммарного дохода потребителей $x(p, \sum_{k=1}^{M} I^k) = \sum_{k=1}^{M} x^k(p, I^k)$ необходимо, чтобы перераспределение доходов между потребителями не влияло на совокупный спрос. На первый взгляд может показаться, что, если бы потребители имели одинаковые предпочтения, то это было бы так. Следующий пример для случая двух потребителей показывает, что даже при одинаковых предпочтениях перераспределение доходов не обязано быть нейтральным по отношению к совокупному спросу.

Итак, рассмотрим экономику с двумя товарами и двумя потребителями. При некоторых ценах изобразим кривую «доход — потребление» (см. рис. 6.3). Каждая точка на этой кривой соответствует оптимальному потребительскому набору при заданных ценах и некотором уровне дохода. Поскольку потребители имеют одинаковые предпочтения и различаются лишь доходами, то они находятся в разных точках этой кривой. Пусть выбор первого потребителя представлен точкой A, а второго — точкой B. Рассмотрим некое перераспределение доходов между этими участниками: пусть доход первого потребителя растет, а доход второго потребителя сокращается ровно на такую же величину. Как мы видим, с ростом дохода первый потребитель начинает приобретать больше второго товара и практически не изменяет потребление первого. Второй потребитель, напротив, резко сокращает потребление первого товара, практически не меняя при этом потребление второго. Это приводит к тому, что совокупный спрос на первый товар падает, а на второй растет. Таким образом, даже при одинаковых предпочтениях перераспределение доходов повлияло на совокупный спрос.

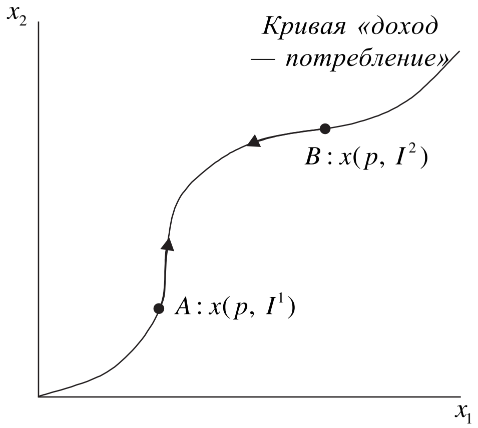

Рис. 6.3. Перераспределение доходов не является нейтральным по отношению к совокупному спросу даже при одинаковых предпочтениях потребителей

Какие условия могли бы гарантировать нейтральность совокупного спроса к перераспределению доходов? Для ответа на этот вопрос рассмотрим изменение совокупного спроса на i-й товар, вызванное (дифференциально) малым перераспределением доходов:

$$dx_i(p,\ I^1,\ I^2,\ \ldots,\ I^M) = \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial x_i^k(p, I^k)}{\partial I^k} dI^k, \text{ где } \sum_{k=1}^{M} dI^k = 0.$$

Заметим, что в случае одинаковой для всех потребителей чувствительности спроса к доходу мы действительно получили бы желаемый результат: если $\dfrac{\partial x_i^k(p,\ I^k)}{\partial I^k} = \alpha_i$ для всех $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ M$, то

$$dx_i(p,\ I^1,\ I^2,\ \ldots,\ I^M) = \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial x_i^k(p,\ I^k)}{\partial I^k} dI^k = \alpha_i \sum_{k=1}^{M} dI^k = 0.$$

Графически условие $\dfrac{\partial x_i^k(p,\ I^k)}{\partial I^k} = \alpha_i$ для всех $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ M$ означает, что имеет место параллельность кривых «доход — потребление» для всех потребителей.

Утверждение 6.2. Условие параллельности кривых «доход — потребление».

Кривые «доход — потребление» для разных потребителей параллельны при любых ценах и доходах тогда и только тогда, когда предпочтения потребителей порождают косвенную функцию полезности формы Гормана с одинаковыми коэффициентами при доходах: $v^k(p,\ I^k) = \alpha^k(p) + \beta(p) I^k$ для всех $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ M$.

Мы не будем доказывать данное утверждение. Укажем только, что достаточность данного свойства устанавливается на основе тождества Роя.

Таким образом, гарантировать зависимость совокупного спроса от совокупного дохода можно лишь при очень сильном ограничении на предпочтения потребителей. При проведении эконометрических исследований зачастую доступны данные не только об агрегированном (среднем) доходе, но и о некоторых дополнительных характеристиках распределения доходов, например о дисперсии. В этом случае можно скорректировать сам подход, т.е. рассмотреть условия, при которых совокупный спрос будет функцией не только от среднего, но и от дисперсии доходов. Наличие дополнительной информации о распределении доходов, возможно, позволило бы расширить класс предпочтений за рамки представленного выше.

Вместе с тем рассмотрение механизма формирования доходов в явном виде часто позволяет достаточно сильно ограничить допустимые варианты перераспределения доходов, относительно которых нам хотелось бы получить нейтральность совокупного спроса. Например, в моделях общего равновесия каждый потребитель владеет некоторым первоначальным запасом и долей в прибыли фирм. В результате его доход оказывается некой функцией от цен, что ограничивает возможные варианты перераспределения доходов.

2. Агрегированный спрос и слабая аксиома выявленных предпочтений

Как известно, слабая аксиома выявленных предпочтений позволяет нам говорить о рациональности поведения потребителя, т.е. о согласованности его выбора в разных ситуациях. Будет ли совокупный спрос удовлетворять слабой аксиоме, если он порожден индивидуальными функциями спроса, которые удовлетворяют этой аксиоме?

Напомним формулировку слабой аксиомы.

Определение

Функция совокупного спроса $x(p, I)$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений, если $px(p', I') \leq I$ и $x(p, I) \neq x(p', I')$ означает, что $p'x(p, I) > I'$ для любых (p, I) и (p', I'). □

Построим простой пример с двумя потребителями и двумя товарами, демонстрирующий, что для произвольных предпочтений слабая аксиома при агрегировании не наследуется автоматически. Итак, рассмотрим двух потребителей (A и B) с одинаковыми доходами, но разными предпочтениями. Изобразим на рис. 6.4 выбор каждого потребителя в двух ситуациях: при ценах p и доходе I и при ценах p' и доходе I'. Выбор потребителя A изображен квадратиками, выбор потребителя B — кружочками. Как мы видим, индивидуальный спрос каждого участника удовлетворяет слабой аксиоме. На этом же рисунке крестиками изображен совокупный спрос как средний потребительский набор двух участников в каждой ситуации. При сопоставлении этих усредненных потребительских наборов мы видим, что первый был доступен, когда выбирался второй, и наоборот. Таким образом, в данном примере слабая аксиома не выполняется для усредненного совокупного спроса, а значит, не выполняется и для совокупного спроса.

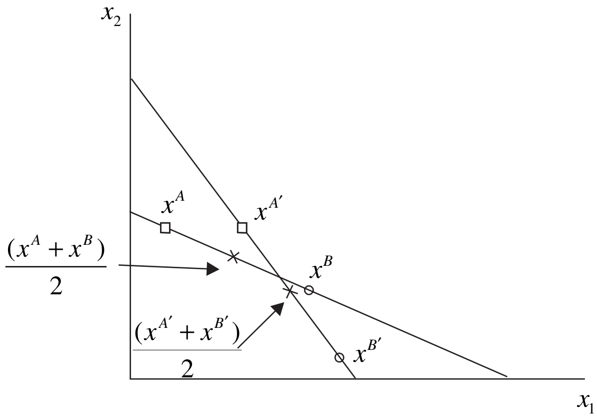

Рис. 6.4. Нарушение слабой аксиомы для совокупного спроса

Почему же аксиома выявленных предпочтений, вообще говоря, не наследуется при агрегировании спроса? Попробуем проанализировать изменение спроса, разбив его на эффект дохода и эффект замещения. На рис. 6.5 видно, что эффекты замещения (*SE*) сдвигают совокупный спрос в нужную сторону, а эффекты дохода разнонаправлены, что в итоге и приводит к нарушению слабой аксиомы. Рассмотрим ситуацию с «упорядоченными» эффектами дохода.

Изобразим графически случай гомотетичных предпочтений (см. рис. 6.6). Используя тот факт, что при гомотетичных предпочтениях кривые «доход — потребление» — это прямые, выходящие из начала координат, мы можем по точкам первоначального выбора $x^A(p, I)$ и $x^B(p, I)$ схематично изобразить выбор при новых ценах и доходах

$x^A(p', I')$ и $x^B(p', I')$. Для этого достаточно изобразить эффекты замещения по Слуцкому, а затем получить эффекты дохода (*IE*), сдвигаясь вдоль соответствующего луча. Заметим, что даже в отсутствии эффектов замещения эффекты дохода сдвигали бы совокупный спрос в нужном направлении. В результате такой упорядоченности эффектов дохода совокупный спрос удовлетворяет слабой аксиоме.

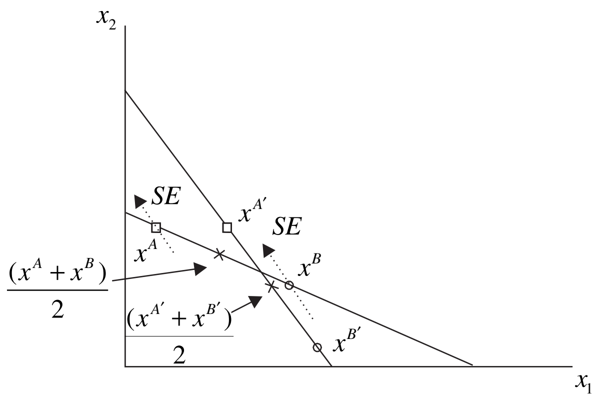

Рис. 6.5. Причина нарушения слабой аксиомы для совокупного спроса в хаотичном поведении эффектов дохода

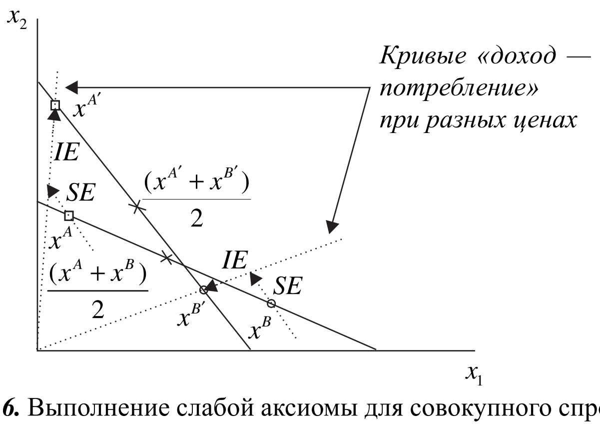

Рис. 6.6. Выполнение слабой аксиомы для совокупного спроса при гомотетичных предпочтениях

Итак, графический анализ навел нас на мысль, что корень проблемы в том, что эффекты дохода могут действовать в направлении, противоположном эффектам замещения. Наложим некоторые ограничения на поведение эффектов дохода, а именно: рассмотрим, будет ли выполняться слабая аксиома в случае, когда совокупный спрос удовлетворяет закону спроса.

В дальнейшем будем рассматривать не произвольные распределения доходов, а будем полагать, что доход каждого потребителя составляет фиксированную долю от совокупного дохода, причем считая, что эта доля не зависит от цен: $I^k(p,\ I)=\alpha^k I$, где $I=\sum_{k=1}^{M} I^k$.

Определение

Функция спроса $x(p,\ I)$ удовлетворяет закону спроса, если для любых цен $p,\ p'$ и дохода I имеет место $(p'-p)\big(x(p',\ I)-x(p,\ I)\big)\le 0$, причем неравенство будет строгим, если $x(p,\ I)\ne x(p',\ I)$. □

Утверждение 6.3. Условие наследования слабой аксиомы при агрегировании.

Если функции агрегированного спроса удовлетворяют закону спроса, то агрегированный спрос удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

Доказательство

Рассмотрим $(p,\ I)$ и $(p',\ I')$ такие, что $x(p,\ I)\ne x(p',\ I')$ и $px(p',\ I')\le I$. Покажем, что $p'x(p,\ I)>I'$. Для того чтобы применить закон спроса, нам нужно рассматривать неизменный доход.

Воспользуемся тем, что спрос однородный нулевой степени, и рассмотрим вектор цен $\tilde{p}=\frac{I}{I'}p'$, тогда $x(\tilde{p},\ I)=x(\frac{I'}{I}\tilde{p},\ \frac{I'}{I}I)=x(p',\ I')$.

Поскольку $x(p,\ I)\ne x(\tilde{p},\ I)$, то из закона спроса получаем $(\tilde{p}-p)\big(x(\tilde{p},I)-x(p,I)\big)<0$. Преобразуем левую часть неравенства:

$$(\tilde{p}-p)\big(x(\tilde{p},\ I)-x(p,\ I)\big)=\tilde{p}x(\tilde{p},\ I)-px(\tilde{p},\ I)-\tilde{p}x(p,\ I)+px(p,\ I).$$

Поскольку $\tilde{p}x(\tilde{p}, I) = I$ и $px(p, I) = I$ и, кроме того, по условию $px(\tilde{p}, I) = px(p', I') \le I$, то имеем

$$0 \ge (\tilde{p} - p)\big(x(\tilde{p}, I) - x(p, I)\big) =$$
$$= I - px(\tilde{p}, I) + I - \tilde{p}x(p, I) \ge I - \tilde{p}x(p, I).$$

С учетом определения $\tilde{p}$ полученное неравенство можно переписать как

$$I - \tilde{p}x(p, I) = I - \frac{I}{I'}p'x(p, I) \le 0,$$

откуда, домножив на $\dfrac{I'}{I}$, имеем искомое неравенство $p'x(p, I) > I'$. ■

В каких же случаях совокупный спрос будет удовлетворять закону спроса? Во-первых, в отличие от слабой аксиомы, закон спроса наследуется при агрегировании, т.е., если индивидуальный спрос каждого участника удовлетворяет закону спроса, то и совокупный спрос будет удовлетворять закону спроса. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно просто просуммировать соответствующее соотношение (закон спроса) по всем индивидуумам. Однако даже если для каких-то участников закон спроса не выполняется на индивидуальном уровне, это еще не означает, что закон спроса не выполняется для совокупного спроса, поскольку он может появиться в результате агрегирования.

Заметим, что полученный нами результат опирался на предположение о независимости распределения доходов от цен. В действительности это не обязательно так. Например, в моделях общего равновесия распределение доходов является функцией цен. В этих случаях совокупный спрос может не удовлетворять слабой аксиоме, даже если имеет место закон спроса на индивидуальном уровне.

3. Агрегированный спрос и анализ благосостояния

Последний вопрос, на котором мы остановимся в связи с агрегированием спроса, связан с существованием репрезентативного потребителя. Итак, предположим, что функции агрегированного спроса удовлетворяют слабой аксиоме. Можно ли в этом случае гарантировать, что этот спрос является решением задачи для некоторого фиктивного потребителя, которого принято называть (позитивным) репрезентативным потребителем? Этот вопрос схож с проблемой восстановления предпочтений на основе функции маршалловского спроса, которую мы обсуждали в лекции 5. Как мы знаем, при некоторых технических ограничениях на функции спроса ответ на данный вопрос положителен. Стоит правда отметить, что слабой аксиомы для этого недостаточно. Необходимо, чтобы совокупный спрос удовлетворял сильной аксиоме выявленных предпочтений.

Предположим, что нам удалось найти предпочтения, порождающие совокупный спрос. Можем ли мы использовать эти предпочтения для анализа благосостояния, т.е. будет ли позитивный репрезентативный потребитель являться нормативным репрезентативным потребителем? Очевидно, что вопрос о нормативном репрезентативном потребителе тесно связан с функцией общественного благосостояния, которая позволяет нам оценивать благосостояние общества в целом. В силу того что мы можем рассматривать различные функции общественного благосостояния W, предпочтения позитивного потребителя при одной функции W могут соотносить различные экономические политики в точности так, как это делает данная функция, а при другой функции общественного благосостояния ранжирование ситуаций с точки зрения репрезентативного потребителя может вовсе не соответствовать ранжированию с точки зрения общества. Таким образом, вопрос о существовании нормативного репрезентативного потребителя для каждой конкретной функции общественного благосостояния должен решаться отдельно.

Рекомендуемая литература

Основная

Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic Theory. N.Y.: Oxford University Press, 1995. Ch. 3, 4.

Varian H. Microeconomic Analysis. 3rd ed. N.Y.; L.: W.W. Norton & Company, 1992. Ch. 7—10.

Дополнительная

Chipman J., Moore J. Compensating Variation, Consumer's Surplus and Welfare // American Economic Review. 1980. 70. P. 933—948.

Deaton A., Muellbauer J. Economics and Consumer Behavior. Cambridge University Press, 1980. Ch. 1—7.

Hausman J. Exact Consumer Surplus and Deadweight Loss // American Economic Review. 1981. 71. P. 662—676.

Jehle G., Reny Ph. Advanced Microeconomic Theory. 2nd ed. Addison-Wesley, 2000. Ch. 1, 2.

Vives X. Small Income Effects: A Marshallian Theory of Consumer Surplus and Downward Sloping Demand // Review of Economic Studies. 1987. 54. P. 87—103.

Ф88 **Фридман, А. А.** Лекции по курсу микроэкономики продвинутого уровня [Текст] / А. А. Фридман ; Гос. ун-т — Высшая школа экономики. — М. : Изд. дом ГУ ВШЭ, 2007. — 375, [1] с. — 3000 экз. — ISBN 978-5-7598-0335-5 (в пер.).

Курс лекций включает все основные разделы современной микроэкономики. Он построен на нескольких вариативных курсах, читающихся в магистратуре Государственного университета — Высшей школы экономики для различных специальностей экономического факультета. Изложение предполагает знание основ микроэкономического анализа в пределах программы бакалавриата, основных понятий теории игр, а также необходимые математические знания (математический анализ, теория нелинейной оптимизации, теория вероятностей). В курсе учтено все лучшее из западных учебников по микроэкономике, а также опыт преподавания этой дисциплины в отечественных вузах.

Для студентов, аспирантов и преподавателей экономических вузов, факультетов и специальностей.

УДК 330.101.542(075)
ББК 65.012.1

Учебное издание

Фридман Алла Александровна

Лекции по курсу микроэкономики продвинутого уровня

Зав. редакцией *О.А. Шестопалова*
Редактор *Е.Н. Ростиславская*
Художественный редактор *А.М. Павлов*
Компьютерная верстка и графика: *Н.Е. Пузанова*
Корректор *Е.Е. Андреева*

Подписано в печать 23.07.2007. Формат 60×88 $^1/_{16}$. Бумага офсетная
Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная. Усл. печ. л. 22,8
Уч.-изд. л. 17,76. Тираж 3000 экз. (1-й завод — 1000 экз.)
Заказ № . Изд. № 523

ГУ ВШЭ. 125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Тел./факс: (495) 772-95-71